

doi:10.3969/j.issn.2095-0411.2020.04.010

含小参数微分方程的动力学性质

王 峰

(常州大学 阿里云大数据学院,江苏 常州 213164)

摘要:针对含小参数微分方程 $\ddot{x} + \epsilon p(t)x = q(t)x^\beta$, 采用平均方法和三阶近似方法, 获得其动力学性质, 包括周期解的存在性、不存在性、稳定性和不稳定性。这里 $\beta > 0, \beta \neq 1, \epsilon > 0$ 为小参数, p, q 为连续的 T -周期函数。与已有文献相比较, 本文获得的周期解是非平凡解, 并得到稳定性结果。

关键词:小参数; 微分方程; 动力学性质; 稳定性

中图分类号:O 175.13

文献标志码:A

文章编号:2095-0411(2020)04-0071-06

Dynamic Properties of Differential Equations with a Small Parameter

WANG Feng

(Aliyun School of Big Data, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: We are concerned with the dynamic properties for the class of differential equation $\ddot{x} + \epsilon p(t)x = q(t)x^\beta$. Dynamic properties include existence, nonexistence, stability and instability. Here $\beta > 0, \beta \neq 1, \epsilon > 0$ is a small parameter and p, q are continuous T -periodic functions. Our results are proved using the averaging method and the third approximation method. Compared with the existing literature, the periodic solutions obtained in this paper are nontrivial and the stability results are obtained.

Key words: small parameter; differential equation; dynamic properties; stability

考虑含小参数的微分方程

$$\ddot{x} + \epsilon p(t)x = q(t)x^\beta \quad (1)$$

式中: $\beta > 0, \beta \neq 1, \epsilon > 0$ 为小参数; p, q 为连续的 T -周期函数。方程(1)可用于刻画具有非线性回复力的机械振动系统, 如著名的 Mathieu-Duffing 方程

$$\ddot{x} + \epsilon(1 + \cos t)x = x^\beta \quad (2)$$

收稿日期:2019-12-08。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11861028); 国家自然科学基金青年基金资助项目(11501055)。

作者简介:王峰(1979—), 男, 江苏泰州人, 博士, 副教授。E-mail: fengwang@cczu.edu.cn

引用本文:王峰. 含小参数微分方程的动力学性质[J]. 常州大学学报(自然科学版), 2020, 32(4): 71-76.

有关方程(2)的研究最早起源于文献[1],给出了周期解的存在性定理,即对于任意 $\epsilon > 0$, 方程(2)存在 1 个周期解,但并没有排除平凡解。随后文献[2-3]研究了方程(2)非平凡周期解的存在性。最近,文献[4]在更加一般的条件下,得到超线性 ($\beta > 1$) 情形下周期解的存在性,推广了文献[2-3]中的结果。

本文将讨论含小参数微分方程(1)和方程(2)周期解的存在性、稳定性和不稳定性等动力学性质。与已有文献相比较,本文不仅获得方程正周期解的存在性,而且获得进一步的动力学性质,即稳定性和不稳定性。

1 引 理

1.1 平均方法

为了获得方程周期解的存在性结果,首先给出有关平均方法的引理,详见文献[5]。

引理 1 考虑下列微分方程

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x, \epsilon) \quad (3)$$

式中 $f: \mathbf{R} \times D \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续函数,关于第一变量是 T -周期的,关于 x, ϵ 属于 C^1 , D 为 \mathbf{R}^n 中的开子集。定义

$$f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt$$

假设 $f_0(x_0) = 0$, 其中 $x_0 \in D$, 且雅可比矩阵行列式 $J_{f_0}(x_0) \neq 0$ 。则存在 $\epsilon_0 > 0$ 和连续函数 $x(t, \epsilon)$, 其中 $(t, \epsilon) \in \mathbf{R} \times [0, \epsilon_0]$, 使得对于任意 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ 和 $x(t, 0) = x_0$, 有 $x(t, \epsilon)$ 是方程(3)的 T -周期解。而且,解 $x(t, \epsilon)$ 是 x_0 附近的唯一解。进一步地,如果雅可比矩阵行列式具有 1 个正特征值,则 $x(t, \epsilon)$ 为不稳定的周期解。

1.2 三阶近似方法

为了获得方程周期解的稳定性结果,下面给出三阶近似方法^[6]。考虑微分方程

$$\ddot{x} + f(t, x) = 0 \quad (4)$$

式中 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数,关于第一变量是 T -周期函数且具有足够的光滑性,满足 $f \in C^{0,4}(\mathbf{R}/T\mathbf{Z} \times \mathbf{R})$ 。令 $x(t)$ 是方程(4)的 T -周期解,将方程(4)的解变换到原点,得到三阶近似方程

$$\ddot{y} + a(t)y + b(t)y^2 + c(t)y^3 + o(y^3) = 0 \quad (5)$$

式中: $a(t) = f_x(t, x(t))$; $b(t) = \frac{1}{2}f_{xx}(t, x(t))$; $c(t) = \frac{1}{6}f_{xxx}(t, x(t))$ 。

方程(5)的线性化方程是 Hill 方程

$$\ddot{y} + a(t)y = 0 \quad (6)$$

如果 Floquet 乘子 λ_1, λ_2 满足 $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $|\lambda_1| = 1$, $\lambda_1 \neq \pm 1$, 则称方程(6)为椭圆的或线性稳定的。此时,旋转数 ρ 定义为 $\lambda = \exp(\pm i\rho T)$, 记 $\theta = \rho T$ 。

众所周知,方程(6)的线性稳定并不能保证方程(5)的 Lyapunov 稳定性。如果方程(6)的乘子满足 $\lambda^q \neq 1$, 其中 $1 \leq q \leq 4$, 则称方程(4)的 T -周期解 x 为 q -基本的。

现在,给出第一扭转系数的表达式

$$\mu = \iint_{[0,T]^2} b(t)b(\tau)r^3(t)r^3(\tau)\chi_\theta(|\varphi(t) - \varphi(\tau)|)dt d\tau - \frac{3}{8} \int_0^T c(t)r^4(t)dt \quad (7)$$

式中

$$\chi_{\theta}(x) = \frac{3\cos\left(x - \frac{\theta}{2}\right)}{16\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\cos 3\left(x - \frac{\theta}{2}\right)}{16\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)} \quad x \in [0, \theta]$$

$r(t)$ 是奇异方程

$$\ddot{r} + a(t)r = \frac{1}{r^3}$$

的唯一正周期解, 方程(7)中的函数 $\varphi(t)$ 由

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{ds}{r^4(s)} \quad t \in \mathbf{R}$$

给出。

引理 2 由文献[7]中的 Moser 不变曲线定理知, 如果 x 是 4-基本的, 第一扭转系数 μ 不等于 0, 则 x 是扭转的, 且扭转周期解是稳定的。

本文将用到一些记号, 给定连续 T -周期函数 h , 记

$$\bar{h} = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt; \quad h_m = \min_{t \in [0, T]} h(t); \quad h_M = \max_{t \in [0, T]} h(t)$$

2 主要结果

2.1 不存在性

在方程(1)两端积分知, 存在 1 个正周期解的必要条件为

$$\int_0^T [\varepsilon p(t)x(t) - q(t)x^\beta(t)] dt = 0$$

因此, 得到下列正周期解不存在的定理。

定理 1 假设下列条件之一成立: ① $p_m \geq 0$ 和 $q_M < 0$; ② $p_m > 0$ 和 $q_M \leq 0$; ③ $p_M \leq 0$ 和 $q_m > 0$; ④ $p_M < 0$ 和 $q_m \geq 0$ 。则方程(1)不存在正周期解。

2.2 存在性

定理 2 假设 $\overline{pq} > 0$ 。则当 ε 充分小, 方程(1)至少存在一个 T -周期解 $x(t, \varepsilon)$ 。而且, 满足下列渐近性质

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{\frac{1}{1-\beta}} x(t, \varepsilon) = \sigma^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (8)$$

式中 $\sigma = \frac{\overline{p}}{\overline{q}}$ 。

证明: 方程(1)等价于下列平面系统

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = q(t)x^\beta - \varepsilon p(t)x \quad (9)$$

采用变换

$$x = u\varepsilon^{\frac{1}{\beta-1}}; \quad y = v\varepsilon^{\frac{\beta+1}{2(\beta-1)}}; \quad \gamma = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

则系统(9)等价于

$$\dot{u} = \gamma v; \quad \dot{v} = \gamma(q(t)u^\beta - p(t)u) \quad (10)$$

系统(10)的平均系统为

$$\dot{\xi} = \gamma \eta; \quad \dot{\eta} = \gamma(\overline{q}\xi^\beta - \overline{p}\xi) \quad (11)$$

根据假设 $\overline{pq} > 0$, 经过简单计算得平均系统(11)有唯一的非退化的常数解

$$(\xi_0, \eta_0) = (\sigma^{\frac{1}{\beta-1}}, 0)$$

即雅可比矩阵行列式在 (ξ_0, η_0) 处不等于 0。由引理 1 知, 平衡态 (ξ_0, η_0) 关于小参数 γ 是连续的。故存在 γ_0 , 使得当 $0 < \gamma < \gamma_0$ 时, 系统(10)的 T -周期解 $(u(t, \gamma), v(t, \gamma))$ 一致收敛于 (ξ_0, ν_0) 。回到原来的变换, 得到当 $\gamma \rightarrow 0^+$ 时方程(1)至少存在一个 T -周期解 $x(t, \epsilon)$, 且满足式(8)。

2.3 不稳定性

定理 3 假设 $\bar{p} \neq 0$, 则对于任意 $q \in C(\mathbf{R}/T\mathbf{Z}, \mathbf{R})$, 当 ϵ 足够小, 方程(1)至少存在一个 T -周期解 $x(t, \epsilon)$ 。进一步地, 满足 $(1-\beta)\bar{p} < 0$, 当 ϵ 足够小, 方程(1)至少存在一个不稳定的 T -周期解。

证明: 经过简单计算, 平均系统(11)在平衡态 (ξ_0, ν_0) 的雅各比矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma(\beta-1)\bar{p} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\bar{p} \neq 0$ 可知, 矩阵 \mathbf{A} 没有零特征值, 故由引理 1 知, 方程(1)至少存在 1 个 T -周期解 $x(t, \epsilon)$ 。进一步地, 如果 $(1-\beta)\bar{p} < 0$, 则矩阵 \mathbf{A} 存在一个正特征值。因此, 方程(1)至少存在 1 个不稳定的 T -周期解。

2.4 稳定性

定理 4 假设 $0 < \beta < 1$, $p > 0$, $\bar{q} > 0$, 且

$$p_m - \beta\sigma q_M > 0 \quad (12)$$

则当 ϵ 充分小, 定理 2 的得到 T -周期解 $x(t, \epsilon)$ 是稳定的。

证明: 为了简便起见, 记周期解 $x(t, \epsilon)$ 为 $x(t)$ 。令 $f(t, x) = \epsilon p(t)x - q(t)x^\beta$ 则三阶近似方程的系数为:

$$a(t) = a(t, \epsilon) = \epsilon p(t) - \beta q(t)x^{\beta-1} \quad (13)$$

$$b(t) = b(t, \epsilon) = \frac{1}{2}\beta(1-\beta)q(t)x^{\beta-2} \quad (14)$$

$$c(t) = c(t, \epsilon) = \frac{1}{6}\beta(1-\beta)(\beta-2)q(t)x^{\beta-3} \quad (15)$$

将式(8)代入式(13)~式(15), 得:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(t)}{\epsilon} = p(t) - \beta q(t)\sigma \quad (16)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{b(t)}{\epsilon^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}} = \frac{1}{2}\beta(1-\beta)q(t)\sigma^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} \quad (17)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{c(t)}{\epsilon^{\frac{3-\beta}{1-\beta}}} = \frac{1}{6}\beta(1-\beta)(\beta-2)q(t)\sigma^{\frac{3-\beta}{1-\beta}} \quad (18)$$

利用式(12), 得到

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{a(t)}{\epsilon} = p(t) - \beta q(t)\sigma \geq p_m - \beta q_M \sigma > 0$$

故当 ϵ 充分小, $a(t)$ 非负。而且由文献[8]中的推论 4.1, 得:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\bar{a}}{\epsilon} = (1-\beta)\bar{p} \quad (19)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{\frac{1}{4}} r(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-\beta)\bar{p}}} \quad (20)$$

由文献[9]中的引理 3.6 知,当 ε 充分小,方程(6)是椭圆的,且是 4-基本的。而且由文献[10]知 $\chi_\theta(\iota)$ 沿着直线 $\iota = \theta/2$ 是对称的, $\chi_\theta(\iota)$ 在区间 $\left[0, \frac{\theta}{2}\right]$ 上严格单调增加, $\left[\frac{\theta}{2}, \theta\right]$ 上严格单调减少。因此

$$\min_{\iota \in [0, \theta]} \chi_\theta(\iota) = \chi_\theta(0) = \frac{3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{16\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{16\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)} \quad (21)$$

$$\max_{\iota \in [0, \theta]} \chi_\theta(\iota) = \chi_\theta\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{16\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{16\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)} \quad (22)$$

由式(21)~式(22)知,当 ε 充分小,有

$$\chi_\theta(\iota) = \frac{5}{12\theta}(1 + O(\theta^2)) = \frac{5}{12}(T\sqrt{a})^{-1} + O(\bar{a}) \quad (23)$$

式(23)用到事实 $\theta = T\rho$ 和 $\bar{a} \rightarrow 0^+$ 时,旋转数

$$\rho = \sqrt{a} + O(\bar{a})。$$

因此

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\varepsilon^{\frac{1}{2}} \chi_\theta(|\varphi(t) - \varphi(s)|)] = \frac{5}{12T} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)\bar{p}}}$$

定义

$$\mu_1 = \iint_{[0, T]^2} b(t)b(s)r^3(t)r^3(s)\chi_\theta(|\varphi(t) - \varphi(s)|) dt ds$$

$$\mu_2 = \int_0^T c(t)r^4(t) dt$$

应用式(16)~式(20),有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu_2}{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T \frac{c(t)}{\varepsilon^{\frac{3-\beta}{1-\beta}}} \cdot \varepsilon r^4(t) dt = \int_0^T \frac{1}{6} \beta(1-\beta)(\beta-2)q(t)\sigma^{\frac{3-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{(1-\beta)\bar{p}} dt =$$

$$\frac{1}{6} \beta(1-\beta)(\beta-2)T\bar{q}\sigma^{\frac{3-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{(1-\beta)\bar{p}} = \frac{1}{6} \beta(\beta-2)T\sigma^{\frac{2}{1-\beta}}$$

又

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu_1}{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{[0, T]^2} \left[\frac{b(t)}{\varepsilon^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}} \right] \left[\frac{b(s)}{\varepsilon^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}} \right] [\varepsilon^{\frac{3}{4}} r^3(t)] \times [\varepsilon^{\frac{3}{4}} r^3(s)] [\varepsilon^{\frac{1}{2}} \chi_\theta(|\varphi(t) - \varphi(s)|)] dt ds$$

利用类似的计算,得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu_1}{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} = \iint_{[0, T]^2} \frac{1}{2} \beta(1-\beta)q(t)\sigma^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{2} \beta(1-\beta)q(s)\sigma^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} \times \frac{1}{(1-\beta)\bar{p} \sqrt{(1-\beta)\bar{p}}} \times$$

$$\frac{5}{12T \sqrt{(1-\beta)\bar{p}}} dt ds = \frac{5\beta^2(1-\beta)^2\sigma^{\frac{2(2-\beta)}{1-\beta}}}{48T(1-\beta)^2\bar{p}^2} \iint_{[0, T]^2} q(t)q(s) dt ds =$$

$$\frac{5\beta^2 T^2 \bar{q}^2 \sigma^{\frac{2(2-\beta)}{1-\beta}}}{48T\bar{p}^2} = \frac{5T\beta^2 \sigma^{\frac{2}{1-\beta}}}{48}$$

因此

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu_1 - \frac{3}{8}\mu_2}{\varepsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} = \frac{5}{48} \beta^2 T \sigma^{\frac{2}{1-\beta}} - \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \beta(\beta-2) T \sigma^{\frac{2}{1-\beta}} = \frac{1}{24} \beta(\beta+3) T \sigma^{\frac{2}{1-\beta}}$$

故 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{\epsilon^{\frac{2}{1-\beta}}} \neq 0$ 。即当 ϵ 充分小, 扭转系数 μ 不等于零, 故由引理 2 知, 定理 2 获得的周期解 $x(t, \epsilon)$ 是稳定的。

利用定理 4 相同的证明技巧, 得到下列定理。

定理 5 假设 $\beta > 1$, $\bar{q} < 0$, $q < 0$, 且满足条件式(12)。则当 ϵ 充分小, 定理 2 的得到 T -周期解 $x(t, \epsilon)$ 是稳定的。

最后, 将主要结果直接应用到 Mathieu-Duffing 方程(2)。令 $p(t) = 1 + \cos t$, $q \equiv 1$, 由定理 2 和定理 3 直接得到定理 6。

定理 6 当 ϵ 充分小, 方程(2)至少存在一个 2π -周期解 $x(t, \epsilon)$ 。进一步地, 当 $\beta > 1$ 时, 该周期解是不稳定的。

公开问题: 值得一提的是, 由于 $p(t) = 1 + \cos t$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上不满足恒大于 0 的条件, 故定理 4 并不能直接应用到方程(2)。截至目前, 有关方程(2)稳定性结果依然还是一个公开问题, 需要进一步研究。

参考文献:

- [1] ESMAILZADEH E, NAKHAIE-JAZAR G. Periodic solutions of a Mathieu-Duffing type equation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1997, 32(5): 905-912.
- [2] TORRES P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equation via a Krasnoselskii fixed point theorem[J]. Journal of Differential Equation, 2003, 20(1): 643-662.
- [3] TORRES P J. Non-trivial periodic solutions of a non-linear Hill's equation with positively homogeneous term[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2006, 65(4): 841-844.
- [4] ZAMORA M. A note on the periodic solutions of a Mathieu-Duffing type equations[J]. Mathematische Nachrichten, 2017, 290(7): 1113-1118.
- [5] HALE J K. Ordinary differential equations[M]. New York: Krieger Pub Co, Huntington, 1980: 194-196.
- [6] ORTEGA R. Periodic solution of a Newtonian equation: stability by the third approximation[J]. Journal of Differential Equation, 1996, 128(1): 491-518.
- [7] SIEGEL C L, MOSER J. Lectures on celestial mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1971: 155-173.
- [8] CHU J F, ZHANG M R. Rotation number and Lyapunov stability of elliptic periodic solutions[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 2008, 21(4): 1071-1094.
- [9] LEI J Z, TORRES P J, ZHANG M R. Twist character of the fourth order resonant periodic solution[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2005, 17(1): 21-50.
- [10] ZHANG M R. The best bound on the rotations in the stability of periodic solutions of a Newtonian equation[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2003, 67(1): 137-148.

(责任编辑: 李艳, 谭晓荷)