关于线性相关函数的一个定理

江苏化工学院　徐启源

摘　　要

在本文中，我们用线性微分方程解的理论简明地证明了下面定理：

若：1) $W[x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_n(t)]\equiv 0 \quad t\in[a,b]$；

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots\cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots\cdots & x_n'(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \cdots\cdots & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}$$

2) 矩阵的秩为 n-1，则函数组 $x_1(t), x_2(t)\cdots\cdots, x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 的至少一个子区间上为线性相关。

在线性微分方程的一般理论中已证明如下定理。

定理 1　若函数组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关，则该函数组的 Wronski 行列式在 $[a,b]$ 上恒等于零。

注 1　定理 1 给出的是函数组线性相关的必要条件，其逆不真，即函数组在某区间上线性无关，其 Wronski 行列式也可能在该区间上恒等于零。

例如易证函数组

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2 & -1\leqslant t\leqslant 0 \\ 0 & 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \quad 和 \quad x_2(t)=\begin{cases} 0 & -1\leqslant t\leqslant 0 \\ t^2 & 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

在 $[-1, 1]$ 上为线性无关，但它们的 Wronski 行列式在 $[-1, 1]$ 上却是恒等于零的。此外该函数组在 $[-1, 0]$ 或 $[0, 1]$ 上分别是线性相关的，这是因为至少有一个函数在这些区间恒等于零。

定理 2　函数组 $x_1(t), X_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关的充要条件是该函数组的 Gram 行列式等于零。

注 2　由于函数组的线性相关和线性无关是两个对立的概念，因此定理 2 也可用来判定函数组的线性无关性，这用反证法易见。

由定理 1 及注 1 可知：如果函数组的伏朗斯基行列式在 $[a,b]$ 上恒等于零，该函数组在 $[a,b]$ 上可能为线性相关，也可能为线性无关，此时可用 Gram 行列式的值予以判定（定理 2）。

若判定为线性相关，由定义易见，它们在〔a,b〕的任一子区间上必为线性相关；若判定为线性无关，则不能得出它们在〔a,b〕的子区间上为线性无关的结论，这在注1中已予以说明。对此，我们有下面的定理并给以一种简单的证明。

定理3　设函数组 $x_1(t)$，$x_2(t)$，……，$x_n(t)$ 的Wronski行列式在〔a，b〕上恒等于零，且矩阵

$$B(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots\cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots\cdots & x_n'(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \cdots\cdots & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \quad t\in[a,b]$$

的秩等于n-1，则该函数组在〔a，b〕的至少一个子区间上是线性相关的。

证明　因矩阵B(t)的秩为n-1，所以对某一$t_0\in[a,b]$，必有一(n-1)阶行列式不等于零，不失一般性，不妨设

$$A(t_0)=\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots\cdots & x_{(n-1)}(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) & \cdots\cdots & x'_{(n-1)}(t_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(n-2)}(t_0) & x_2^{(n-2)}(t_0) & \cdots\cdots & x_{n-1}^{(n-2)}(t_0) \end{vmatrix}\neq 0$$

由于函数的连续性，必存在包含t_0的某一闭区间$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，使当$t\in[\alpha,\beta]$时，有$A(t)\neq 0$。

构造(n-1)阶齐线性微分方程

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots\cdots & x_{n-1}(t) & x(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots\cdots & x'_{n-1}(t) & x'(t) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots\cdots & x_{n-1}^{(n-1)}(t) & x^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}=0 \quad t\in[\alpha,\beta] \quad (*)$$

该方程的最高阶（n-1阶）系数是A(t)，它在$[\alpha,\beta]$上不等于零。将$x_n(t)$代入(*)式，左端即为Wronski行列式，于是在$[\alpha,\beta]$上也有$W(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0$，所以$x_n(t)$是(*)方程的解。再将$x_1(t)$，$x_2(t)$，……，$x_{n-1}(t)$分别代入(*)式，由行列式的性质知，它们也都是(*)式在$[\alpha,\beta]$上的解，于是(n-1)阶线性微分方程在$[\alpha,\beta]$上有n个特解：$x_1(t)$，$x_2(t)$，……，$x_n(t)$。根据线性微分方程解的理论，它们在$[\alpha,\beta]$上必为线性相关，证毕。

参考文献

〔1〕王高雄等编《常微分方程》，高等教育出版社，1984年.

〔2〕B.B.史捷班诺夫《微分方程教程》，高等教育出版社，1956年.

〔3〕M. Л. Краснов, А. И. Киселев Г. И. Макаренко, 《Сборник задач по обыкновенным Дифференциальным Уравнениям》, 1978年.

A Theorem Concerning Linear Dependence Functions

Xu Qiyuan

ABSTRACT

In this paper we aplly the theory of the solution of linear differential equation to the brief proof of the theorem below:

If: 1. $W[x_1(t), x_2(t)\cdots\cdots, x_n(t)] = 0 \qquad t\in[a,b]$;

2. matrix:
$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t)\cdots\cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t)\cdots\cdots & x_n'(t) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}$$

the rank of the matrix above is n-1.

Then the functions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots\cdots$, $x_n(t)$ are linear dependence functions on one or more than one subinterval of $[a,b]$.