刚体平衡问题的微机分析

江苏化工学院　缪瑞卿

内容提要

空间刚体平衡问题是理论力学的教学难点，以往一直采用手工计算，相当繁琐。本文从平衡方程的基本式出发，给出适合电算的算式，用电算代替手算，使之化难为易。文中有二算例。通过微机练习，将有助于培养学生的电算能力。

众所周知，工科理论力学是一门理论性较强的技术基础课，它是各门力学的基础，并在许多工程技术领域中有着广泛的应用。为了提高教学质量，最新颁布的“高等工业学校理论力学课程教学基本要求”，鼓励各校创造条件，培养学生的电算能力。如何在理论力学教学中引入微机分析，培养学生的能力，是今天这门古老的力学课程所面临的新问题。为此，从我院的实际情况出发，在教学中适当开展一些电算活动将是有益的。

空间刚体平衡问题是教学的难点，以往一直采用手工计算，相当麻烦。现从空间平衡方程的基本式出发，给出适合电算的算式，用电算代替手算，使之化难为易。再者，由于避开了繁复的手工计算，可以将教学的重点更多地放在基本概念，基本理论和微机训练上，让学生去领略精华之所在。

空间一般力系平衡方程的基本形式是：

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x=0,\ \ \Sigma F_y=0,\ \ \Sigma F_z=0\\ \Sigma m_x(\vec{F})=0,\ \ \Sigma m_y(\vec{F})=0,\ \ \Sigma m_z(\vec{F})=0\end{array}\right\}\qquad(1)$$

这是六个独立的方程式。一般而言，有一个刚体，就能够列出六个方程。计算在空间力系作用下的平衡问题有以下步骤：

a．建立统一的直角坐标系，准备原始数据；

b．选取研究对象，画受力图；

c．建立平衡方程，求解未知力。

这里需要计算力在空间三坐标轴上的投影和力对轴的矩以及力偶矩在轴上的投影。

设力矢量 $\vec{F}_j$ 作用点 $(x_1、y_1、z_1)$，再沿矢量方向取另一点 $(x_2、y_2、z_2)$，其方向余弦为

$$\left.\begin{array}{l}l=\cos(\vec{F}_j,\ x)=(x_2-x_1)/d\\ m=\cos(\vec{F}_j,\ y)=(y_2-y_1)/d\\ n=\cos(\vec{F}_j,\ z)=(z_2-z_1)/d\\ \text{其中}\\ d=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\}\qquad(2)$$

那末，$\vec{F}_j$在轴上的投影和对轴的矩为

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= l F_j \\
F_y &= m F_j \\
F_z &= n F_j \\
M_x &= y_1 F_z - z_1 F_y = (y_1 n - z_1 m) F_j \\
M_y &= z_1 F_x - x_1 F_z = (z_1 l - x_1 n) F_j \\
M_z &= x_1 F_y - y_1 F_x = (x_1 m - y_1 l) F_j
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

同样，若沿力偶矩矢量方向取两点，也可以算出它的方向余弦，记为

$$\left.\begin{aligned}
l_0 &= \cos(\vec{M}_j,\ x) \\
m_0 &= \cos(\vec{M}_j,\ y) \\
n_0 &= \cos(\vec{M}_j,\ z)
\end{aligned}\right.$$

那末，$\vec{M}_j$在轴上的投影为 (4)

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= l_0 M_j \\
M_y &= m_0 M_j \\
M_z &= n_0 M_j
\end{aligned}\right\}$$

将它们写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ n & 0 \\ (y_1 n - z_1 m) & l_0 \\ (z_1 l - x_1 n) & m_0 \\ (x_1 m - y_1 l) & n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_j \\ M_j \end{pmatrix} \tag{5}$$

这是个适合电算的算式，右边第一个矩阵表明单独一个力$\vec{F}_j$和一个力偶矩$\vec{M}_j$对平衡方程系数矩阵能够作出何等贡献。如此，刚体平衡方程系数矩阵应当包含所有未知量对它的贡献；平衡方程的常数项列阵则应当包含所有已知量的贡献。对于多刚体系统将建立N阶线性代数方程组

$$\underset{(n,\ n)}{A}\ \underset{(n,\ l)}{X} = \underset{(n,\ l)}{B} \tag{6}$$

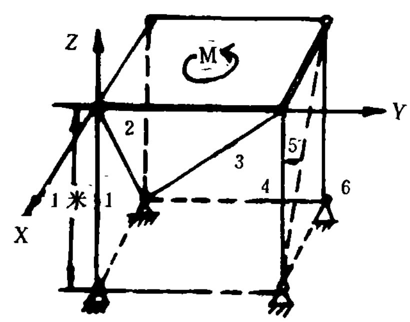
其中A为系数矩阵，B为常数项列阵，X为未知量列阵。

手工解题目，为了避免引起冗长的计算，常常使用一些计算技巧。如选择投影轴和力矩轴时，有关的角度和尺寸最好为已知或较易算出；投影轴要与尽可能多的未知力相垂直，而力矩轴要与尽可能多的未知力相交或平行；尽管可以灵活地用基本形式或多矩形式列平衡方程，但却增加了判断方程独立性的难度。引入微机后，可按统一的式子进行分析求解，不用担心数字难算。对这些手算技巧可以不理它。基于本文是从平衡方程的基本式出发来讨论问题的，这样就能保证方程的独立性。方程的系数全部自动生成。同时，根据已知外载荷产生

方程的常数项。方程建立后，可调用现成的子程序求解，获得计算结果。

本文采用高斯消去法子程序(见2700至2750语句)，它具有功能：由已知的N和A，求出解存于R中。子程序中，N为方程个数减1，A为增广矩阵，R为存放方程的解，M为中间工作单元。调用前应先输入N，定义数组A、R、M并生成数组A；调用后输出数组R。

例一、设有边长为1米的正方形薄板由六根连杆支持，高度为1米，不计板的重量，并把连杆看作两力杆。求当板上有一力偶M＝10牛顿一米作用时各杆的内力。



列表计算如下：

$\vec{S}_j$	$\vec{S}_1$	$\vec{S}_2$	$\vec{S}_3$	$\vec{S}_4$	$\vec{S}_5$	$\vec{S}_6$
(x_1, y_1, z_1)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)	(−1, 1, 0)	(−1, 1, 0)
(x_2, y_2, z_2)	(0, 0, −1)	(−1, 0, −1)	(−1, 0, −1)	(0, 1, −1)	(0, 1, −1)	(−1, 1, −1)
$x_2—x_1$	0	−1	−1	0	1	0
$y_2—y_1$	0	0	−1	0	0	0
$z_2—z_1$	−1	−1	−1	−1	−1	−1
d	1	1.41421	1.73205	1	1.41421	1
l	0	−.707107	−.577350	0	.707107	0
m	0	0	−.577350	0	0	0
n	−1	−.707107	−.577350	−1	−.707107	−1
$y_1\ n—z_1\ m$	0	0	−.577350	−1	−.707107	−1
$z_1\ l—x_1\ n$	0	0	0	0	−.707107	−1
$x_1\ m—y_1\ l$	0	0	.577350	0	−.707107	0

表中最后六行为方程的系数矩阵。根据外载荷方程的右端项列阵为：

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10]^T$$

解方程可得六根杆子的内力：

$$[S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6]^T$$

$$=[-10 \quad 14.1421 \quad 0 \quad 0 \quad 14.1421 \quad -10]^T$$

（牛顿）。

BASIC 程序

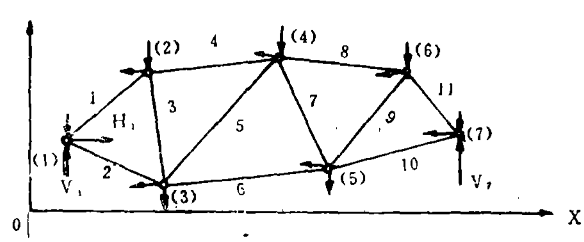
```
10   DIM  X1(5), Y1(5), Z1(5), X2(5), Y2(5), Z2(5), A (5, 6)
20   FOR  J=0  TO  5
30   READ  X1(J), Y1(J), Z1(J), X2(J), Y2(J), Z2(J)
40   NEXT J
50   DATA    0,   0,   0,   0,   0,  -1
60   DATA    0,   0,   0,  -1,   0,  -1
70   DATA    0,   1,   0,  -1,   0,  -1
80   DATA    0,   1,   0,   0,   1,  -1
90   DATA   -1,   1,   0,   0,   1,  -1
100  DATA   -1,   1,   0,  -1,   1,  -1
110  FOR  J=0  TO  5
120  D=SQR ([X2(J)-X1(J)]∧2+[Y2(J)-Y1(J)]
       ∧2+[Z2(J)-Z1(J)]∧2)
130  A(0, J)=[X2(J)-X1(J)]/D
140  A(1, J)=[Y2(J)-Y1(J)]/D
150  A(2, J)=[Z2(J)-Z1(J)]/D
160  A(3, J)=Y1(J)*A(2, J)-Z1(J)*A(1, J)
170  A(4, J)=Z1(J)*A(0, J)-X1(J)*A(2, J)
180  A(5, J)=X1(J)*A(1, J)-Y1(J)*A(0, J)
190  NEXT J
200  FOR I=0 TO 5
210  A(I, 6)=0
220  NEXT I
230  A(5, 6)=-10
240  N=5
250  DIM R(N), M(N)
260  GOSUB 2700
270  FOR I=0 TO 5
280  PRINT "S"; I+1; "="; R(I)
290  NEXT I
300  END
2700 REM GEM, FROM A TO R
2702 I=-1
2704 I=I+1: P=I: Q=0: EB=A(I, 0)
2706 FOR J=I TO N: FOR K=0 TO N
2708 IF ABS[A(J, K)]<=ABS(EB) THEN 2712
2710 EB=A(J, K): P=J: Q=K
2712 NEXT K
```

```
2714  NEXT J
2716  IF ABS(EB)>1E—30 GOTO 2720
2718  PRINT "FAIL": STOP
2720  FOR K=0 TO N+1: R=A(I, K)
2722  A(I, K)=A(P, K): A(P, K)=R: NEXT K
2724  FOR J=0 TO N
2726  IF J=I GOTO 2740
2728  IF A(J, Q)=0 GOTO 2740
2730  R=A(J, Q)/EB
2732  FOR K=0 TO N+1
2734  IF K=Q THEN A(J, Q)=0: GOTO 2738
2736  A(J, K)=A(J, K)-A(I, K)*R
2738  NEXT K
2740  NEXT J
2742  M(I)=Q; IF I<N THEN 2704
2744  REM SOLUTION:
2746  FOR I=0 TO N: Q=M(I)
2748  R(Q)=A(I, N+1)/A(I, Q): NEXT I
2750  RETURN.
```

例二、设图示静定曲弦桁架，各结点受单位荷载作用，求各杆内力和约束反力。

解：假设杆力S_1、S_2……、S_{11}为拉力及反力H_1、V_1、V_7的方向沿坐标正向。今沿着各力矢方向取两点，给出它们的坐标值。采用结点法，在结点建立$\Sigma F_x=0$及$\Sigma F_y=0$两个平衡方程式。这里共有7个结点，可建立14个方程式，联立求解14个未知量。

在作微机分析时，为了自动生成方程的系数矩阵A需要构造一个与它同阶的信息矩阵。只要我们注意到一根杆子的内力对相邻两个结点都有贡献，它们的大小相等，方向相反，就不难得到这个矩阵。为节省存贮单元起见，不妨将这些信息记入A中：



未　　知　　力

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1										1	1	
2														
3	−1		1	1										
4														
5		−1	−1		1	1								
6														
7				−1	−1		1	1						
8														
9						−1	−1		1	1				
10														
11								−1	−1		1			
12														
13										−1	−1			1
14														

由矩阵A中的信息引路，将各杆的方向余弦l、m及$-l$、$-m$送到相应的位置上去，如此便生产系数矩阵A。同时，根据外载荷，给出方程的常数项。方程建立后，即可调用标准子程序求解。所得结果如下：

$S_1=-5.705$　　$S_2=-1.727$

$S_3=2.116$　　$S_4=-3.784$

$S_5=-.4337$　　$S_6=.04015$

$S_7=.2019$　　$S_8=-3.144$

$S_9=.8855$　　$S_{10}=.5696$

$S_{11}=-2.588$　　$H_1=7$

$V_1=3.792$　　$V_7=3.208$

BASIC 程序

```
10 DIM X1(13), Y1(13), X2(13), Y2(13), A(13, 14)
20 FOR J = 0 TO 13
30 READ X1(J), Y1(J), X2(J), Y2(J)
40 NEXT J
50 DATA  2,  5,  7,  9
51 DATA  2,  5,  8,  2
52 DATA  7,  9,  8,  2
53 DATA  7,  9, 15, 10
54 DATA  8,  2, 15, 10
55 DATA  8,  2, 18,  3
56 DATA 15, 10, 18,  3
57 DATA 15, 10, 23,  9
```

```
58  DATA  18,  3, 23,  9
59  DATA  18,  3, 26,  5
60  DATA  23,  9, 26,  5
61  DATA   2,  5,  4,  5
62  DATA   2,  5,  2,  7
63  DATA  26,  5, 26,  7
70  FOR I=0 TO 13
80  FOR J=0 TO 14
90  A (I, J)=0
100  NEXT J
110  NEXT I
111  A( 0,  0)=1: A( 2,  0)=-1
112  A( 0,  1)=1: A( 4,  1)=-1
113  A( 2,  2)=1: A( 4,  2)=-1
114  A( 2,  3)=1: A( 6,  3)=-1
115  A( 4,  4)=1: A( 6,  4)=-1
116  A( 4,  5)=1: A( 8,  5)=-1
117  A( 6,  6)=1: A( 8,  6)=-1
118  A( 6,  7)=1: A(10,  7)=-1
129  A( 8,  8)=1: A(10,  8)=-1
120  A( 8,  9)=1: A(12,  9)=-1
121  A(10, 10)=1: A(12, 10)=-1
122  A( 0, 11)=1
123  A( 0, 12)=1
124  A(12, 13)=1
130  FOR J=0 TO 13
140  D=SQR((X2(J)-X1(J))∧2+(Y2(J)-Y1(J))∧2)
150  C=(X2(J)-X1(J))/D: PRINT"l="; C
160  S=(Y2(J)-Y1(J))/D: PRINT"m="; S
170  FOR I=0 TO 6
180  B=A(2*I, J)
190  IF B=0 THEN 210
200  A(2*I, J)=SGN(B)*C
205  A(2*I+1, J)=SGN(B)*S
210  NEXT I
220  NEXT J
230  FOR I=0 TO 13
250  A(I, 14)=1
260  NEXT I
```

```
270 N=13
280 DIM R(N), M(N)
290 GOSUB 2700
300 FOR I=0 TO N
310 PRINT "S"; I+1; "="; R(I)
320 NEXT I
330 END
```

（以下2700至2750语句同上例）

参 考 资 料

〔1〕上海交通大学吴镇编"理论力学"，1983.7.

〔2〕华东工学院李定钎等编"BASIC语言"，1983.10.

〔3〕江苏化工学院缪瑞卿编"理论力学教学参考资料"，1988.9.

An Analysis of Equilibrium Problems for Rigid Body with Personal Computer

Miao Ruiqing

ABSTRACT

In theoretical mechanics, three dimensional equilibruim problems are troublesome. An analysis of problems with manual calculation is inconveneint. A simple formula which is based on equilibruim equations is provided in this paper. It is concerned with personal computer instead of manual calculation and, as a result, the problem becomes easier. Calculating ablity of college students is trained beneficially by means of practice with personal computer.