第二期　江苏化工学院学报　No. 2
1989年　JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF CHEMICAL TECHNOLOGY　1989

切线反问题与奇解

康连城

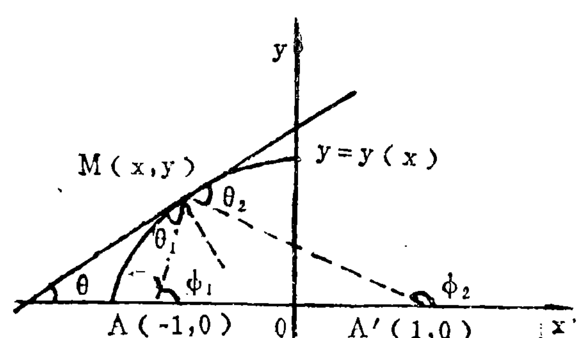
摘　要

本文研究切线反问题和奇解。对于切线反问题的一般情形导出它的微分方程，并讨论这些方程的奇解。我们还着重研究了作为奇解或非奇解的二重奇点轨迹，同时介绍了奇解的判别方法。

一、用初等方法或微积分都可以证明这样一个事实：以双曲线、椭圆、抛物线等二次曲线为母线的旋转曲面，具有特殊的光学特性。把光源放在焦点位置，发出的光线经上述曲面形状的镜面反射，当母线是椭圆时，反射光线集聚在另一焦点上，当母线为抛物线时，反射光线是平行光，等等。但问题的原始提法，并不是已知曲线，验证具有上述特性。相反，它是由于设计光学系统的实际需要，要求求出具有上述特性的曲线。早在Euclid年代（公元前三世纪）人们就已熟悉光的反射定律：光线的入射角等于反射角。这就需要计算曲线的切线（或法线）。所以问题归结为：根据曲线的切线（或法线）的性质求曲线本身，这就是所谓“切线反问题”。

例如要求光线从一个定点出发，经过曲线的反射聚于另一个定点，试求此曲线。

我们通过建立和求解微分方程来解决这问题。如图(1)建立坐标系，定点分别为 $A(-1,0)$，$A'(1,0)$ 设所求曲线为 $y=y(x)$，$M(x,y)$ 为其上任一点，AM 为入射线，则 MA' 为反射线。根据反射定律，$\theta_1=\theta_2$，这里 $\theta_1(\theta_2)$ 为入(反)射角的余角，即曲线在M点的切线与入(反)射线的夹角。因此，



图(1)

$$\operatorname{tg}\theta_1=\operatorname{tg}\theta_2$$

而 $$\operatorname{tg}\theta_1=\operatorname{tg}(\phi_1-\theta)=\frac{\left(\frac{y}{x+1}\right)-\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)\frac{dy}{dx}},$$

$$\operatorname{tg}\theta_2=\operatorname{tg}(\theta-\phi_2)=\frac{\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x-1}\right)}{1+\left(\frac{y}{x-1}\right)\frac{dy}{dx}},$$

$$\therefore\quad \frac{\left(\frac{y}{x+1}\right)-\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{y}{x+1}\right)\frac{dy}{dx}}=\frac{\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x-1}\right)}{1+\left(\frac{y}{x-1}\right)\frac{dy}{dx}}$$

经整理，得曲线应满足的微分方程：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2-1}{xy}\right)\frac{dy}{dx}-1=0 \tag{1}$$

两边同乘以 y^2，并作变换 $x^2=X$，$y^2=Y$，得

$$X\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+(X-Y-1)\frac{dY}{dX}-Y=0, \tag{2}$$

令 $\frac{dY}{dX}=p$，(2) 式可写为

$$Y=pX-\frac{p}{p+1} \tag{3}$$

两边对 X 求导，注意到 $\frac{dY}{dX}=p$，得

$$\left(X-\frac{1}{(p+1)^2}\right)\frac{dp}{dX}=0 \tag{4}$$

1° 如 $\frac{dp}{dX}=0$， 则 $p=C$

$$\therefore\quad Y=CX-\frac{C}{C+1},\quad 即\quad y^2=Cx^2-\frac{C}{C+1} \tag{5}$$

其中C是任意常数。

2° 如 $X-\frac{1}{(p+1)^2}=0$，代入 (3) 可得 $Y=-\frac{p^2}{(p+1)^2}$，

$$\therefore\quad \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{(p+1)^2} \\ y^2=\dfrac{-p^2}{(p+1)^2} \end{cases} \tag{6}$$

从解 (5)，我们知道这是共焦椭圆(或双曲线)族。而解 (6)，消去参数 p 得 $y^2+(1\pm x)^2=0$，这只是一些孤立点，不是原问题的解。这说明了这一切线反问题的解只有椭圆或双曲线，前者产生实象，后者产生虚象。

按照类似的方法，对于切线反问题：光线从一个定点（设为坐标原点）发出，经过曲线反射后得到平行光（设平行于 x 轴），求此曲线。我们可以归结为求解微分方程：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{2x}{y}\right)\frac{dy}{dx}-1=0。$$

可以求出其解为抛物线族 $y^2=c(c+2x)$，这几个切线反问题，最早为 Descartes (1596～1650) 所解决，他是从微小量之间的相关性质得到，而不是解微分方程得到。因为那时连微积分也尚未创立，更不用说微分方程了。

二、一般切线反问题是：曲线上每点的切线都有某种性质，这种性质只与切线有关，而与切点无关，求此曲线。设曲线上任一点为 (x,y)，其切线为

$$Y-y=y'(X-y) \text{ 即}$$

$$Y=y'X+(y-xy') \tag{7}$$

于是切线的某种性质可用 y' 及 $(y-xy')$ 的关系式表示之，即

$$F(y',\ y-xy')=0$$

如可由此式解为显函数形式

$$y=xy'+f(y') \tag{8}$$

这就是著名的 Clairaut 方程，求解这个方程可得它的通解为

$$y=cx+f(c) \tag{9}$$

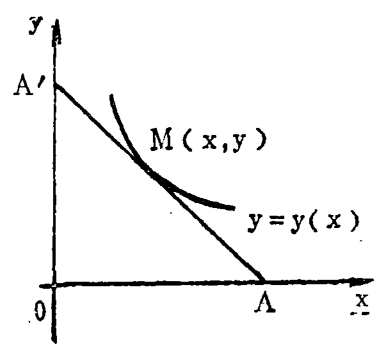
当 $f_1'\neq 0$ 时还有参数形式的解

$$\begin{cases} x=-f'(p) \\ y=-pf'(p)+f(p) \end{cases} \tag{10}$$

从几何意义上看解（9）是单参数直线族，而（10）则是这族直线的包络线，我们称（10）为奇解。在实用上我们感兴趣的不是通解（9），而是它的包络（即奇解），因为这是真正的“曲”线。

例如求一曲线，它的任一切线在两坐标轴之间的线段长为常数 a。显然任一与两坐标轴的交点之间相距为 a 的直线都满足要求。然而我们要的是真正的“曲”线。

如图（2），设 $M(x,y)$ 为曲线上任一点，过 M 的切线为 $Y=y'X+(y-xy')$，它与坐标轴的交点分别为



图（2）

$$A\left(x-\frac{y}{y'},\ 0\right),\quad A'(0,\ y-xy')$$

而 $\overline{AA'}=a$，

$$\therefore\quad \left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=a^2$$

即
$$y=xy'\pm\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{11}$$

对这个 Clairaut 方程，有通解（直线族）

$$y=cx\pm\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \tag{12}$$

及奇解（此直线族的包络）

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \tag{13}$$

这就是星形线，真正的"曲"线

三、上面所提到的微分方程的奇解，其一般定义是：一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的某一解，它所表示的平面曲线，其上每一点解的唯一性都不成立。即至少有方程的另一条解曲线通过并相切，则此解称为方程的奇解。

我们知道方程 $F(x,y,y')=0$ 关于所有变元连续可微及 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ 等是解存在的唯一充分条件。因此在其他条件继续成立时，某解为奇解的必要条件是 $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$。记 $y'=p$，方程的奇解必须满足

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F'_p(x,y,p)=0, \end{cases} \tag{14}$$

当消去 p 得到一条曲线时，称之为 p-判别曲线。当（15）不表示一条曲线或虽为一条曲线，但不满足原方程 $F(x,y,y')=0$，方程肯定没有奇解。即使（15）所表示的曲线是 $F(x,y,y')=0$ 的解，还需要经过检验，才能断定是否为奇解。其方法是要先求出方程的通解（单参数曲线族），验证（15）表示的曲线上每一点是否有族中的曲线与之相切。存在这样的情况：p-判别曲线仅仅是方程的特解而非奇解。如方程 $(y')^2-y^3=0$，$(y\geqslant 0)$，它的 p-判别曲线为 $\begin{cases} p^2-y^3=0, \\ 2p=0 \end{cases}$ 消去 p 得到 $y=0$，满足原方程但不是奇解，因为原方程的通解曲线族为 $y=\frac{4}{(x+c)^2}$，这族曲线并不与 $y=0$ 相交，当然更谈不上相切了。

另外我们从曲线族与它的包络来研究奇解。设有一单参数曲线族，及另一非族中的曲线，如果后者每一点上都有族中的某一曲线与之相切，则称它为曲线族的包络曲线（简称包络）。从上可知一阶方程通解曲线族如有包络存在就是方程的奇解。

设方程 $F(x,y,y')=0$ 的通解曲线族为：

$$\phi(x,y,c)=0, \tag{15}$$

如有包络存在，记为 $x=x(c)$，$y=y(c)$，这里包络所取的参数 c，与族（15）中的参数相同，即表示任一点（$x(c)$，$y(c)$），包络恰与（17）中取 c 的那一条曲线 $\phi(x,y,c)=0$ 相切。点（$x(c)$，$y(c)$）作为 $\phi(x,y,c)=0$ 上的点，应有

$$\phi(x(c), y(c), c)=0 \tag{16}$$

对求c导，
$$\phi'_x x'(c)+\phi'_y y'(c)+\phi'_c=0, \tag{17}$$

又由于包络与族中某曲线 $\phi(x,y,c)=0$ 在此点 $(x(c), y(c))$ 相切，

$$\therefore \quad \frac{y'(c)}{x'(c)}=-\frac{\phi'_x}{\phi'_y}\Big|_{(x,y)=(x(c),\ y(c))} \tag{18}$$

$\therefore$ (17) 变为 $\phi'_c[x(c), y(c), c]=0$ (19)

可见包络如果存在的话，它必定满足

$$\begin{cases}\phi(x,y,c)=0\\ \phi'_c(x,y,c)=0\end{cases} \tag{20}$$

消去其中的c，得到曲线称之为C-判别曲线。它可能是通解曲线族的包络，即 $F(x,y,y')=0$ 的奇解。但也可能是 $\phi(x,y,c)=0$ 上奇点的轨迹（即满足 $\phi'_x=0$，$\phi'_y=0$ 的点的轨迹）。因为这种点也能满足(20)，奇点的轨迹也可以是奇解。无论哪一种情况都要按包络的定义进行检验，即求出C-判别曲线上每一点的斜率，及通过这一点的 $\phi(x,y,c)=0$ 的斜率，看看是否相等。当C-判别曲线是奇点轨迹时，由于 $\phi'_x=\phi'_y=0$，无法从式：$\phi'_x+\phi'_y\frac{dy}{dx}=0$ 求出斜率。当奇点是二重时，即 ϕ''_{xx}，ϕ''_{yy}，ϕ''_{xy} 不全为0，上式再对x求导一次，注意到 $\phi'_y=0$，得

$$\phi''_{xx}+2\phi''_{xy}\frac{dy}{dx}+\phi''_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0, \tag{21}$$

此为关于 $\frac{dy}{dx}$ 的二次方程，只有当 $\phi''_{xx}\phi''_{yy}-\phi''^2_{xy}=0$ 时，才有唯一的解。如与C-判别曲线在此点的切线斜率相等，这条二重奇点轨迹就是包络，也就是原方程的奇解。当 $\phi''_{xx}\phi''_{yy}-\phi''^2_{xy}\gtrless 0$ 时，原曲线在此点不存在唯一的切线或不存在切线，当然不可能是包络，至于更高重奇点的轨迹，判定其是否为奇解，则更繁、更复杂，这里从略。

例　求方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{27}{8}y=0$ 的奇解：

先求出其通解曲线族

$$(x-c)^3-y^2=0 \tag{22}$$

C-判别曲线为 $\begin{cases}(x-c)^3-y^2=0\\ 3(x-c)^2=0\end{cases}$ 消去c得 $y=0$

对于其上任一点 $(c,0)$，因为 $\phi'_x|_{(c,0)}=\phi'_y|_{(c,0)}=0$，故 $y=0$ 是奇点轨迹，且是二重奇点轨迹（$\because\ \phi''_{yy}=-2$），由 $\phi''_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ 得知 $\frac{dy}{dx}=0$，而族中的某曲线（指c确定时）$(x-c)^3-y^2=0$ 在 $(c,0)$ 点的切线斜率为0，在 $y=0$ 上点点有 $\frac{dy}{dx}=0$，

$\therefore$　$y=0$ 这一二重奇点的轨迹是原方程的奇解。

连续梁弯曲变形的截断多项式解法

沈云程

摘要

本文提供一种用截断多项式求解连续梁弯曲变形的简单方法。这种方法不需要解静不定问题，也不需要解联立方程预先求出多余支反力，就能求得连续梁挠曲线方程的一般表达式。

连续梁是具有一系列中间支座的静不定梁，其静不定次数等于或大于中间支座的数目。求解连续梁静不定问题，已发展了多种方法〔1〕，如叠加法、力矩——面积法，三弯矩方程法等。但是，所有的方法都必须在求得多余支反力以后，才能按照静定梁的分析方法，计算连续梁的弯曲变形，因此求解过程相当冗长。

本文选取中间支座的约束反力为未知量，根据梁的挠曲线近似微分方程、相邻梁段交界处的光滑连续条件和载荷突变条件，求得用截断多项式表示的挠曲线方程。利用梁端和中间

（接第5页）

参考文献

〔1〕Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: 1955

〔2〕П.К. Ращевский: Курс Дифференциальной Геометрии 1950, Москова

On the Inverse Problms of Tangent Line and Singular Solution

Kang Liancheng

ABSTRACT

In this paper, the inverse problems of tangent line and singular solution are inverstigated. For the general case of inverse problem of tangent line, we deduce its differential equations, and discuss the singular solutions of these differential equations. Specially, the locus of doubly singular points is considered, which is singular solution or which isn't. At the same time, we introduce the decision method of singular solution.