

# 连续梁弯曲变形的截断多项式解法

沈 云 程

## 摘 要

本文提供一种用截断多项式求解连续梁弯曲变形的简单方法。这种方法不需要解静不定问题,也不需要解联立方程预先求出多余支反力,就能求得连续梁挠曲线方程的一般表达式。

连续梁是具有一系列中间支座的静不定梁,其静不定次数等于或大于中间支座的数目。求解连续梁静不定问题,已发展了多种方法[1],如叠加法、力矩——面积法,三弯矩方程法等。但是,所有的方法都必须在求得多余支反力以后,才能按照静定梁的分析方法,计算连续梁的弯曲变形,因此求解过程相当冗长。

本文选取中间支座的约束反力为未知量,根据梁的挠曲线近似微分方程、相邻梁段交界处的光滑连续条件和载荷突变条件,求得用截断多项式表示的挠曲线方程。利用梁端和中间

(接第5页)

## 参 考 文 献

- [1] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York, 1955
- [2] П.К. Ращевский; Курс Дифференциальной Геометрии 1950, Москва

## On the Inverse Problems of Tangent Line and Singular Solution

Kang Liancheng

## ABSTRACT

In this paper, the inverse problems of tangent line and singular solution are investigated. For the general case of inverse problem of tangent line, we deduce its differential equations, and discuss the singular solutions of these differential equations. Specially, the locus of doubly singular points is considered, which is singular solution or which isn't. At the same time, we introduce the decision method of singular solution.

支座处的位移边界条件, 计算方程中的待定系数和约束反力, 可以直接得到连续梁的弯曲变形。

## 一、相邻梁段的挠曲线方程

有一根等剖面连续梁(图 1), 其上作用有集中力、集中力偶和线性分布载荷。支座及载荷间断点依次用结点号 0、1、2……等表示。如果梁内弯矩和剪力的正负号采用文[2]的规定,  $xoy$  坐标系如图 1 所示, 则该连续梁的挠曲线近似微分方程为

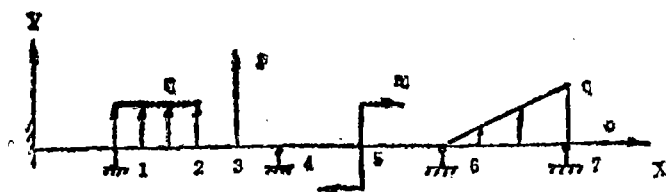


图 1 一端固持一端铰支的连续梁

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (1)$$

式中  $EI$  一梁的抗弯刚度,  $q$  一分布载荷集度。由方程 (1) 可知: 无载荷作用 ( $q = 0$ ) 的梁段, 其挠曲线方程是  $x$  的三次多项式, 均布或梯形分布载荷作用的梁段, 其挠曲线方程分别为  $x$  的四次和五次多项式。

现在分别求在集中力、集中力偶和线性分布载荷作用下相邻梁段的挠曲线方程。

### 1. 集中力

设在连续梁的两个相邻梁段的交界结点  $i$  处仅作用有集中力  $P_i$  (图 2)。

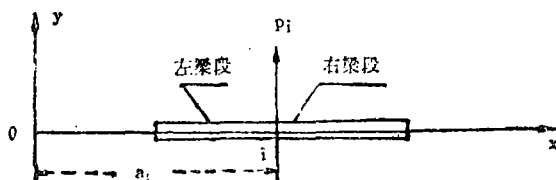


图 2 相邻梁段的载荷情况

则左右梁段的挠曲线方程分别为

$$\begin{aligned} EI y_1 &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \\ EI y_2 &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $c_j$  和  $d_j$  ( $j=0, 2, 3$ ) 为待定常数。

因为左右梁段在截面  $i$  处的挠度、转角和弯矩相等, 而剪力发生突变, 其突变值为  $P_i$ , 故在  $x=a_1$  处有如下条件。

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 & y'_1 &= y'_2 & EI y''_1 &= EI y''_2 \\ EI y'''_1 + P_i &= EI y'''_2 \end{aligned}$$

将 (2) 式分别代入上面四个条件, 得

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 + c_3 a_1^3 &= d_0 + d_1 a_1 + d_2 a_1^2 + d_3 a_1^3 \\ c_1 + 2c_2 a_1 + 3c_3 a_1^2 &= d_1 + 2d_2 a_1 + 3d_3 a_1^2 \\ 2c_2 + 6c_3 a_1 &= 2d_2 + 6d_3 a_1 \\ 6c_3 + P_1 &= 6d_3 \end{aligned} \quad (3)$$

联立解方程组 (3), 可得

$$\begin{aligned} d_0 &= -\frac{P_1 a_1^3}{6} & d_1 &= c_1 + \frac{P_1 a_1^2}{2} \\ d_2 &= c_2 - \frac{P_1 a_1}{2} & d_3 &= c_3 + \frac{P_1}{6} \end{aligned}$$

把待定系数  $d_i$  代入 (2) 式中第二式, 即得右梁段的挠曲线方程

$$EI y_2 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{P_1}{3!} (x - a_1)^3$$

引入截断多项式记号 [3]

$$\begin{aligned} (x - a)_+^n &= \begin{cases} (x - a)^n & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \quad n \text{ 为正整数} \\ (x - a)_+^0 &= \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \end{aligned}$$

于是得到相邻梁段挠曲线方程的统一表达式

$$EI y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{P_1}{3!} (x - a_1)_+^3 \quad (4)$$

很明显, 式中的常数

$$c_0 = y(0) \quad c_1 = y'(0) \quad c_2 = \frac{1}{2} y''(0) \quad c_3 = \frac{1}{6} y'''(0)$$

于是, (4) 式变为

$$EI y = y(0) + y'(0) x + \frac{1}{2} y''(0) x^2 + \frac{1}{6} y'''(0) x^3 + \frac{P_1}{3!} (x - a_1)_+^3 \quad (5)$$

由此得出结论: 如果相邻梁段上无载荷, 只在交界结点处作用有集中力  $P$  时, 则左梁段的挠曲线方程为  $x$  的三次多项式, 而右梁段的挠曲线方程等于左梁段的挠度加上  $\frac{P}{3!} (x - a)^3$ 。

同样, 利用交界结点处的光滑连续条件和载荷突变条件, 可以求得集中力偶和梯形分布载荷情况下相邻梁段的挠曲线方程。为节省篇幅, 此处不予证明, 仅将推导的最后结果列举如下。

## 2. 集中力偶

如果在相邻梁段的交界结点处, 仅作用有集中力偶  $M_j$ , 那么, 其挠曲线方程为

$$EI y = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + \frac{M_j}{2}(x-b_j)^2_+ \quad (6)$$

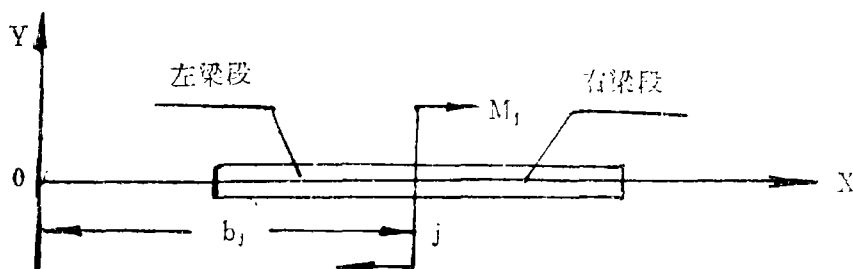


图 3 集中力偶载荷情况

## 3. 梯形分布载荷

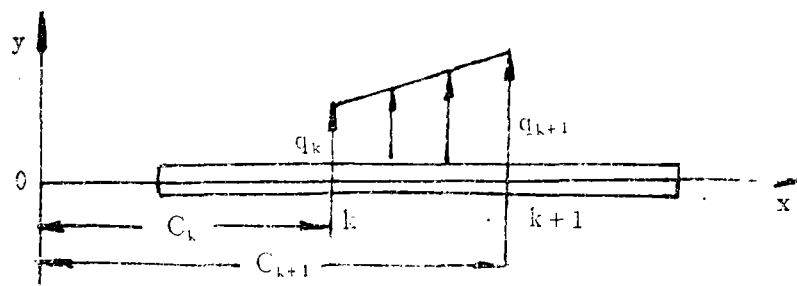


图 4 梯形分布载荷情况

如果在某梁段上仅作用有梯形分布载荷(图 4), 则三个相邻梁段的挠曲线方程为

$$EI y = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + \frac{q_k(x-c_k)^4_+}{4!} + \frac{(q_{k+1}-q_k)(x-c_k)^5_+}{5!(c_{k+1}-c_k)} - \frac{q_{k+1}(x-c_{k+1})^4_+}{4!} - \frac{(q_{k+1}-q_k)(x-c_{k+1})^5_+}{5!(c_{k+1}-c_k)} \quad (7)$$

式中  $q_k, q_{k+1}$  分别为结点  $k$  和  $(k+1)$  处的分布载荷集度。 $c_k, c_{k+1}$  分别为结点  $k$  和  $(k+1)$  的  $x$  坐标。

## 二、连续梁的挠曲线方程

如果在连续梁上作用有  $l$  个集中力  $P_i$ ,  $m$  个集中力偶  $M_j$ ,  $n$  段梯形分布载荷  $q_k$  和  $q_{k+1}$ , 还包含  $p$  个中间支座, 那么, 选取中间支座为多余约束, 代替以多余支反力, 并把它看作集中载荷, 根据挠度叠加原理以及式 (5)、(6)、(7) 得到整个多跨度连续梁的挠曲线方程为

$$\begin{aligned}
 EI y = & y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^l P_i(x-a)_+^3 \\
 & + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^m M_j(x-b_j)_+^2 + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n q_k(x-c_k)_+^4 + \frac{1}{5!} \sum_{k=1}^n \frac{(q_{k+1}-q_k)(x-c_k)_+^5}{(c_{k+1}-c_k)} \\
 & - \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n q_{k+1}(x-c_{k+1})_+^4 - \frac{1}{5!} \sum_{k=1}^n \frac{(q_{k+1}-q_k)(x-c_{k+1})_+^5}{c_{k+1}-c_k} \\
 & + \frac{1}{3!} \sum_{t=1}^p R_t(x-d_t)_+^3 \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中  $P_i$ 、 $M_j$ 、 $q_k$  和  $q_{k+1}$  的方向如图 (2)、(3) 和图 (4) 所示。中间支座反力  $R_t$  的方向和集中力  $P_i$  的方向相同。待定系数  $y(0)$ 、 $y'(0)$ 、 $y''(0)$ 、 $y'''(0)$  以及多余支反力  $R_t$ ，利用连续梁两端和中间支座处的边界条件确定。 $d_t$  为中间支座位置的  $x$  坐标。

### 三、算 例

#### 1. 图示左端固持右端自由的连续梁

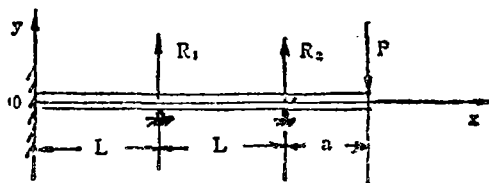


图 5

令中间支座的支反力分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，则从公式 (8) 知连续梁的挠曲线方程应为

$$EI y = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + \frac{1}{6}R_1(x-L)_+^3 + \frac{R_2}{6}(x-2L)_+^3 \quad (a)$$

利用梁端和中间支座处的边界条件确定 (a) 式中的待定系数及多余支反力  $R_1$  和  $R_2$ 。  
梁左端固持， $x=0$  处的边界条件为

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

中间支座处的挠度为零，即在  $x=L$  和  $x=2L$

处  $y = 0$

将此条件分别代入 (a) 式，求得

$$y''(0) = -\frac{1}{3}y'''(0)L$$

$$R_1 = -4y'''(0)$$

梁右端自由,  $x = 2L + a$  处

$$y'' = 0 \quad EI y''' = P$$

把 (a) 式求导后分别代入上两式得

$$R_2 = \left( 18 + \frac{14L}{a} \right) \cdot \frac{1}{6} y'''(0)$$

$$y'''(0) = \frac{3Pa}{7}$$

由此得到支反力和待定系数分别为

$$R_1 = -\frac{12a}{7L}P \quad R_2 = P \left( 1 + \frac{9a}{7L} \right) \quad y''(0) = -\frac{Pa}{L}$$

将上述待定系数及支反力代入 (a) 式, 得梁的挠曲线方程

$$EI y = \frac{Pa}{14L} \left[ -Lx^2 + x^3 - 4(x-L)^3 + \left( 3 + \frac{7L}{3a} \right) (x-2L)^3 \right]$$

## 2. 图示两端固持的连续梁

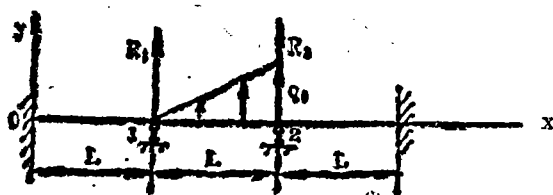


图 6

设中间支座反力为  $R_1$  和  $R_2$ , 从公式 (8) 看出, 满足梁左端边界条件的挠曲线方程为

$$EI y = \frac{1}{2} y''(0) x^2 + \frac{1}{6} y'''(0) x^3 + \frac{R_1(x-L)^3}{6} + \frac{q_0(x-L)^5}{5!L} - \frac{q_0(x-2L)^4}{4!} - \frac{q_0(x-2L)^5}{5!L} + \frac{R_2(x-2L)^3}{6} \quad (a)$$

由中间支座  $x = L$  和  $x = 2L$  处的边界条件  $y = 0$  得

$$y''(0) = -\frac{1}{3} y'''(0) L \quad R_1 = -4 y'''(0) - \frac{q_0 L}{20}$$

根据梁右端  $x = 3L$  处的边界条件  $y = 0$  和  $y' = 0$  分别求得

$$R_2 = 14 y'''(0) - \frac{9}{10} q_0 L \quad y'''(0) = \frac{11}{300} q_0 L$$

把  $y'''(0)$  分别代入  $y''(0)$  和  $R_1$ 、 $R_2$  的表达式得

$$y''(0) = -\frac{11}{900} q_0 L^2 \quad R_1 = -\frac{59}{300} q_0 L \quad R_2 = -\frac{29}{75} q_0 L$$

于是连续梁的挠曲线方程为

$$EI y = -\frac{11}{1800} q_0 L^2 x^2 + \frac{11}{1800} q_0 L x^3 - \frac{59}{1800} q_0 L (x-L)^3 + \frac{q_0 (x-L)^5}{120 L} \\ - \frac{q_0 (x-2L)^4}{24} - \frac{q_0 (x-2L)^5}{120 L} - \frac{29}{450} q_0 L (x-2L)^3$$

### 3. 图示两端铰支连续梁

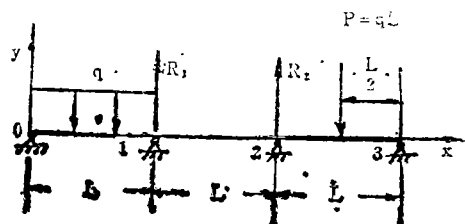


图 7

设中间支座反力为  $R_1$  和  $R_2$ ，则根据式 (8)，可写出满足梁左端边界条件的挠曲线方程。

$$EI y = y'(0) x + \frac{1}{6} y'''(0) x^3 - \frac{q x^4}{24} + \frac{q (x-L)^4}{24} + \frac{R_1 (x-L)^3}{6} \\ + \frac{R_2 (x-2L)^3}{6} - \frac{P (x-\frac{5}{2}L)^3}{6}$$

由  $x=L$  和  $x=2L$  处  $y=0$  的条件，分别求得

$$y'(0) = \frac{q L^3}{24} - \frac{1}{6} y'''(0) L^2$$

$$R_1 = \frac{13}{4} q L - 6 y'''(0)$$

从梁右端  $x=3L$  处的边界条件  $y=0$  和  $y''=0$  分别求出

$$R_2 = 24 y'''(0) - \frac{83}{8} q L$$

$$y'''(0) = \frac{11}{24} q L$$

最后得到

$$R_1 = \frac{q L}{2} \quad R_2 = \frac{5}{8} q L \quad y'(0) = -\frac{5 q L^3}{72}$$

连续梁的挠曲线方程为

$$EI y = -\frac{q}{24} \left[ -\frac{5}{6} L^3 x + \frac{11}{6} L x^3 - x^4 + (x-L)^4 + 2 L (x-L)^3 \right. \\ \left. + \frac{5}{2} L (x-2L)^3 - 4 L (x-\frac{5}{2}L)^3 \right]$$

有了挠曲线方程，对  $x$  求二阶和三阶导数，即可得到梁内的弯矩和剪力、梁端支座反力。

# 合成二甘醇双烷基醚的研究

陈 群 王 钊 陈金龙 李元虎\* 于建梅\* 缪凤仙

## 摘 要

本文描述了二甘醇双烷基醚的合成。作者以二甘醇和硫酸二烷基酯或卤代烃为原料,在固碱作用下,发生 Williamson 反应;并研究了固碱的作用,反应温度、反应时间及原料配比对反应的影响,从而高产率地获得了纯二甘醇双乙醚和双丁醚。

(接第 12 页)

## 参 考 文 献

- [1] 铁摩辛柯,盖尔.材料力学.科学出版社:1978
- [2] 刘鸿文.材料力学.高等教育出版社:1979
- [3] 徐利治,王仁宏,周蕴时.函数逼近的理论与方法.上海科学技术出版社:1983

## An Interrupted Polynomial Solution for the Deflection of a Continuous Beam

Shen Yunchen

## ABSTRACT

This paper provides a simple method for an interrupted polynomial solution for the deflection of a continuous beam. This method is not necessary to solve the indeterminate problems neither the simultaneous equations in order to find the redundancy reactions. It is possible to obtain a general expression for beam deflections.

\* 为本院精细 88 届毕业生.