第1卷 第4期 江苏化工学院学报 Vol. 1 No. 4
1989年 JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF CHEMICAL TECHNOLOGY 1989

用人造基方法求解线性规划问题的程序

张 振 群

摘 要

本文论述如何用人造基来实现对线性规划问题求解的方法，以及用此方法编制带参数通用程序。这在现代化企业管理中遇到线性规划问题时只要输入具体参数和数据即可应用本程序。

一、引 言

在经济体制改革的浪潮中，如何提高经济效益是发展生产的重要环节，在提高经济效益中除了引进先进设备改善生产条件外，如何科学合理安排人力物力资源，有效的生产组织和计划是起着非常重要的作用。线性规划是解决上述问题的一个重要分支，它是运输问题，生产的组织和计划问题，合理下料和配料问题，厂矿的布局问题等，现代化企业科学管理重要手段之一。

但是在复杂的大规模的线性问题中会出现几百个甚至几千个约束条件和变量，这时甚至连判别系数矩阵A是否是满秩（即约束方程中可能有多余的方程）和问题有无可行解（即约束方程中可能有矛盾的方程或问题无非负解）都是困难的，因此要求寻找现成的可行基更是难以实现，更谈不上以现成基为基础建立单纯形表。目前求解线性规则问题方法较多。笔者认为用人造基的方法不但可以求出第一个可行基，而且对线性规则问题是否存在最优价的判别甚为方便。同时使组成单纯形表的运算也比较简便。

二、数 学 描 述

任何一个线性规则问题都可以化成如下的标准形式，即：

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l}
\text{约束方程为} \\
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots\cdots a_{mn}x_n=b_m \\
x_i\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots\cdots n)
\end{array}\right. \\
\text{目标函数为} \\
\min\ S=C_1X_1+C_2X_2\cdots\cdots C_nX_n
\end{array}\right.
$$

在约束方程中 bi（ i = 1, 2, ……m ）均为正值，如有负值，乘以 -1 即可。

把上述方程称为（ I ）式。

引进人造基后约束方程和目标函数修改成如下的形式：

$$
(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l}
\text{约束方程为:} \\
\left\{\begin{array}{l}
S-C_1X_1-C_2X_2\cdots\cdots\cdots C_nX_n=0 \\
Y_1+a_{11}X_1+a_{12}X_2\cdots\cdots\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\
Y_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2\cdots\cdots\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_m+a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\cdots\cdots\cdots a_{mn}x_n=b_m \\
Yi\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots\cdots\cdots m) \\
Xj\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots\cdots\cdots n)
\end{array}\right. \\
\text{目标函数为:} \\
\min\ z=y_1+y_2+\cdots\cdots\cdots y_m
\end{array}\right.
$$

把修改后的方程组称为（ II ）式

用矩阵表示：

约束方程为　　　　目标函数

$AX=b$　　　　$Z=CX$

$$
A=\begin{pmatrix}
1,0,0\cdots\cdots 0 & -C_1 & -C_2 & \cdots\cdots & -C_n \\
0,1,0\cdots\cdots 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
0,0,1\cdots\cdots 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\
\cdots\cdots & & & & \\
\cdots\cdots & & & & \\
0,0,0\cdots\cdots 1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}=[B,N]
$$

$$
B=\begin{pmatrix}
1,0,0\cdots\cdots 0 \\
0,1,0\cdots\cdots 0 \\
0,0,1\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0,0,0\cdots\cdots 1
\end{pmatrix}\text{为单位矩阵}
$$

$$X=[S,Y_1,Y_2,\cdots\cdots Y_m,X_1,X_2,\cdots\cdots X_n]^T$$

$$b=[0,b_1,b_2,\cdots\cdots b_m]^T$$

$$C=[0,1,1,\cdots\cdots 1,0,0,\cdots\cdots 0]=[C_B,C_N]$$

$$C_B=[0,1,1,\cdots\cdots 1]$$

从上可知，从系数矩阵A中前 $m+1$ 列得到单位矩阵形式的可行基 B，它们的逆矩阵 B 也是单位矩阵。

通过矩阵运算可以得到：

$$C_B b=\sum_{i=1}^{m} b_i \qquad B^{-1}b=b \quad B^{-1}A=A$$

$$C_B B^{-1}A-C=C_B A-C=[0,0,\cdots\cdots 0,\sum_{i=1}^{m} a_{i1},\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\cdots\cdots\sum_{i=1}^{m} a_{in}]$$

因此用人造基B可以得到对应单纯表为：

$$T(B)=\begin{pmatrix} C_B B^{-1}b & C_B B^{-1}A-C \\ \\ B^{-1}b & B^{-1}A \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_i & 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & \sum_{i=1}^{m} a_{i1} & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\cdots\cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{in} \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & -C_2 & -C_2\cdots\cdots\cdots & -C_n \\ b_1 & 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ b_2 & 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 & a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

加上基变量名和全部变量名后组成的单纯形表如下：

		S	Y_1	$Y_2\cdots\cdots$	Y_m	X_1	$X_2\cdots\cdots$	X_n
Z	$\sum_{i=1}^{m} b_i$	0	0	0 $\cdots\cdots$	0	$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\cdots\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} a_{in}$
S	0	1	0	0 $\cdots\cdots$	0	$-C_1$	$-C_2\cdots\cdots$	$-C_n$
Y_1	b_1	0	1	0 $\cdots\cdots$	0	a_{11}	$a_{12}\cdots\cdots$	a_{1n}
Y_2	b_2	0	0	1 $\cdots\cdots$	0	a_{21}	$a_{22}\cdots\cdots$	a_{2n}
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Y_m	b_m	0	0	0 $\cdots\cdots$	1	a_{m1}	$a_{m2}\cdots\cdots$	a_{mn}

因为Z是有界的，所以可以从人造基开始根据换基迭代规则进行换基迭代，在换基迭代开始时若发现 $\sum_{i=1}^{m} aij<0$ $(j=1,2\cdots\cdots n)$ 而此时目标函数 $\min Z>0$ 或者在换基迭代结束后得到方程组（Ⅰ）的最优基 B^*，而它们对应的目标函数 $\min Z>0$，在这二种情况下方程组（Ⅰ）无可行解。这可用下述方法证明：

如果方程组（Ⅰ）有可行解，它的解为

$X_j = d_j \quad (j=1, 2\cdots\cdots n)$

$S = S_0$

则：$x_j = d_j \quad (j=1, 2\cdots\cdots n)$

$y_i = 0 \quad (i=1, 2\cdots\cdots m)$

便是方程组（Ⅱ）的一个可行解，这个可行解对应的目标函数 $Z = y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_m = 0$ 与上述 min $Z>0$ 是矛盾的，所以 min $Z>0$ 时方程组（Ⅰ）是无可行解的，即方程组（Ⅰ）的约束条件中至少存在二组相矛盾的方程。

如果求得最优基 B^* 后，它对应的目标函数 min $Z=0$，则又分二种情况：

(1) 若最优基 B^* 的基变量全部变换成 X 变量，B^* 已是方程组（Ⅰ）的可行基，只要在最优基 B^* 对应的单元表中去掉 S，y_i $(i=1,2,\cdots\cdots m)$ 对应的 $m+1$ 列和第一行后，就得到了方程组（Ⅰ）的第一个可行基对应的单纯形表。然后再经过换基迭代即可求得方程组（Ⅰ）的最优基 B^{**} 以及它对应的解。

(2) 若 B^* 的基变量中包含有 y 变量。设 B^* 对应单纯形表中 y 变量在第 r 行，则它对应的方程：

$$Y_r + \sum_{k=3}^{m+2} b_{rk} Y_k + \sum_{j=m+3}^{m+n+2} b_{rj} X_j = 0$$

$(k=3, 4, \cdots\cdots m+2)$　$(j=m+3, m+4, \cdots\cdots m+n+2)$

k,j 表示单纯形表中列的序号

现在有二种情况：

(a) 若 $b_{rj}=0$　$(j=m+3, m+4, \cdots\cdots\cdots m+n+2)$

则方程改为：

$$Y_r + \sum_{k=3}^{m+2} b_{jk} Y_k = 0$$

这表明了方程组（Ⅰ）中第 r 个约束条件是多余的，可以去掉，同时也说明方程组（Ⅰ）的系数矩阵不是满秩的。

(b) 若 b_{rj} 中至少一个不为 0，例 $b_{rs} \neq 0$　$(S \in J)$

则以 b_{rs} 为轴心项进行换基迭代，以 X_s 变量替换 Y_j 变量，可以得到新的最优基及它对应的单纯形表，在新的最优基中减少一个 y 基变量，增加一个 x 基变量。因此经过有限次的换基迭代，一定可以把全部 y 基变量换成 X 基变量，这时与第一种情形一样处理便可得到方程组（Ⅰ）的一个可行基和它对应的单纯形表。最后再换基迭代求得方程组（Ⅰ）的最优基以及它对应的解。

三、程序的结构和框图

由于在线性现代问题中简单的只有几个约束方程和变量，而复杂的可能出现几百个甚至几千个约束方程和变量，又考虑到能在大、中、小及微机等不同计算机上使用，全部程序采用 FORTRAN 语言编制成具有参数通用程序，在考虑数据结构时采用可调数组形式，并建立如下一些数组。描述用人造基组成单纯形表数组 A，为了寻找轴心项而存放二列元素比值

的数组L，在换基迭代过程中记下更换基变量名的字符型数组H1和存放非基变量名的字符型数组H2，为了查找未换基变量 y_i 而设置了存放在换基迭代中更换基变量标志的数组F。由F数组的建立，使得求到最优基B后，查找未更换的基变量带来极大的方便。

求得了第一个可行基以后对A数组采用压缩技术。

在建立单纯形表过程中，考虑到复杂的线性规划问题是要输入大量的数据，而输入数据正确与否是至关重要的，所以采用逐行人机对话形式输入，使输入数据做到正确无误。

为了避免程序段重复，采用多层嵌套子程序形式，使整个程序结构比较紧凑。

由于篇幅限止，程序流程简述如下：

主程序的流程，首先输入参数M和N，调用子程序 SUBLINE，然后询问是否要继续计算新的线性规划问题？如果要，则输入新的系数M和N，否则程序运行结束。

子程序 SUBLINE 的流程，建立可调数组和字符型数组，所有数组置0，输入系数 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_m$ 和 $-C_1, -C_2, \cdots\cdots -C_n$ 之值，求出 Σb，用人机对话形式输入系数矩阵每一行，输入结束后输入字符型数组，调用子程序 SUBFD，然后判别无最优价标志和目标函数值 MIN Z是否为0？若任一个为0，则显示线性规划问题无最优价，返回主程序。若都为0，则查找是否有未换基变量 y_i？如果有，找出未换变量行，判别未换变量所在行对应 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 之值是否为0？如果不为0，则找出 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 第一个不为0所对应的列，调用子程序 SUBCH，然后再查找是否有未换基变量 y_i？如果对应 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 之值都为0，则删除该一行后再查找是否有未换基变量 y_i？如果已没有未换基变量 y_i，则从行和列压缩单纯形表，再调用子程序SUBFD输出目标函数值，基变量之值和非基变量之值，最后返回主程序。

子程序 SUBCH 的流程。根据给定参数行和列所对应元素值变换成1，然后把该元素所在列的其他元素之值全化成0，同时把该列对应字符数组 H_2 的值送至该行对应字符数组 H_1 中，即 $H_2(K) \rightarrow H_1(L)$，最后把换基迭代标志数组对应位置1，即 $F(L)=1$，然后返回。

子程序 SUBFD 的流程，在单纯形表第一行根据参数给定列 N_s 开始查找是否有大于0的值？如果没有，设置无最优价标志后返回，如果有，记下对应的列号K，求出该列和第一列同一行二元素相除之值，再在这些值中找出最小值，并记下该值对应的行号，调用子程序 SUBCH，然后判别是否查找最后一列？如果没有，则从下一列开始重复上述过程，若找到最后一列，则返回。

四、应用实例

在此仅用二个简单的线性规划问题来说明，在第一个实例中，根据提出问题列出约束方程，并在用人造基方法求最优价的过程中详细列出程序执行过程。由于扁幅限止，第二个实例仅列出约束方程及解的结果。

例1，某生产队种植的某种作物，根据当地的气候，土壤等情况，全部生产过程中至少需要32斤氮，磷以24斤为适宜，钾不得超过42斤。现在有甲乙丙丁四种肥料，它们每斤的价格及含氮磷钾的数量如下表所示

所含成分 肥料 数量 成分	甲	乙	丙	丁
氮	0.03	0.30	0	0.15
磷	0.05	0	0.20	0.10
钾	0.14	0	0	0.07
单　价	0.04	0.15	0.10	0.13

求应如何配合使用这些肥料，既能满足作物对氮磷钾的需要又使施肥成本最低？

根据题意设用 X_1、X_2、X_3、X_4 分别表示甲、乙、丙、丁四种肥料的施肥量，列出约束方程：

$$\begin{cases} 0.03x_1+0.3x_2+0.15x_4\geqslant 32 \\ 0.05x_1+0.2x_3+0.1x_4=24 \\ 0.14x_1+0.07x_4\leqslant 42 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

$$\mathrm{MIN}\ S=0.04x_1+0.15x_2+0.1x_3+0.13x_4$$

引进松弛变量化成标准形式的约束方程：

$$0.03x_1+0.3x_2+0.15x_4-x_5=32$$

$$0.05x_1+0.2x_3+0.1x_4=24$$

$$0.14x_1+0.07x_4+x_6=42$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6)$$

$$\mathrm{MIN}\ S=0.04x_1+0.15x_2+0.1x_3+0.13x_4$$

由上述标准形式的约束方程可知：

$m=3$，$n=6$ 它的系数为：

$$\begin{vmatrix} 0.03 & 0.3 & 0 & 0.15 & -1 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.2 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0 & 0 & 0.07 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$[b_1,b_2,b_3]=[32,24,42]$

$[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6]=[0.04,0.15,0.1,0.13,0,0]$

程序在执行过程中根据题示符输入相应的值。

PLEASE INPUT（M AND N）

输入 3 和 6

PLEASE INPUT（b_1，b_2，……b_m）

输入　32，24，42

PLEASE INPUT（$-C_1$，$-C_2$，……$-C_n$）

输入 －0.04，－0.15，－0.1，－0.13，0，0

NOW PLEAS INPUT NO 1 LINE DATA

（数值 1 指出输入第 1 行数据，此值在输入过程中会自动加 1 ）

输入 0.03，0.3，0，0.15，－1，0 第一行数值后立即会显示刚输入这一行的值，又显示

INPUTING DATA IS RIGHT OR ERROR?（Y/N）

输入数据正确的按 Y 键后可输入下一行数据，若有错，则按 N 键可重新输入该行数据。

系数全部输完后又显示：

PLEASE INPUT CHARACTER（$y_1, y_2 \cdots y_m$）

给基变量字符型数组 H1 输值：y_1, y_2, y_3

PLEASE INPUT CHARACTER（$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$）

给非基变量字符型数组 H2 输值，$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

通过运算后得到最优价显示结果为：

$X_1 = 300$

$X_2 = 76.667$

$X_3 = 45$

$X_4 = 0$

$X_5 = 0$

$X_6 = 0$

MIN S = 28

接着又显示：

Do you want for Solution NEW linear programming equation?（Y/N）

若需要求解新的线性规划问题则按 Y 键，否则按 N 键结束计算。

例 2，根据某一个线性规划问题列出标准的约束方程为：

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_4 = 2$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$\mathrm{MIN}\ S = 2x_1 + 2x_2$$

输入各项相应值以后打印出

THIS LINEAR PROGRAMMING EQUATION

HAS NO EXCELLENT SOLUTION

用人造基方法求解线性规划问题的优点是通过人造基立即建立起第一个单纯形表，而且建立单纯形表运算过程较简单，建立单纯形表后及以后的运算过程中能迅速判别出该线性规划问题是否存在最优价，如果有最优价则计算出结果也较快。不足之处是用的数组较大，因此要占用计算机内存单元较多，对于较复杂的线性规划问题需要内存容量较大的计算机才能进行计算。

参考文献

〔1〕范鸣玉，张莹·最优化技术基础·北京：清华大学出版社，1982：10

（下转第31页）

2．新合成的交联剂 ED 反应条件为：反应温度 45℃、反应时间三小时，表氯醇/二乙烯三胺摩尔比 1.75。但是，正如本实验所证明的那样，反应时间越长，所得反应产物 ED 的粘度越高，用于 Npu-1012 树脂作交联剂的交联效果越好。是否反应时间更长一点，交联效果会更好一些呢？有待进一步考察。

3．因为新合成的交联剂 ED 含有活性环氧基（或羟基和氯极）它不但适合于水性聚氨酯作交联剂，可以预料，它还适合于丙烯酸乳液、水性环氧树脂等作交联剂，在染色固色等许多方面也必将找到实际应用。

参 考 文 献

〔1〕戚嘉运·纺织品应用科学·上海：科学技术出版社，1982：147
〔2〕丁忠传等·纺织染整助剂·北京：化学工业出版社，1988：226
〔3〕刘正超·染化药剂（下册）·纺织工业出版社，1982：346～417

Study on the New Linking Agent ED

Fu Rongxing　　Zheng Changhui

ABSTRACT

The synthetic conditions of linking agent ED has been primarily explored in the paper. The experimental results are showed that the linking agent ED is superior to the linking agent EH and FH on linking effect with polyurethane Npu-1012 resins.

（上接第20页）

〔2〕李德，钱颂迪·运筹学·北京：清华大学出版社，1985
〔3〕赵凤治·线性规划计算方法·科学出版社，1981

The Solution to The Linear Programming Sequence By Artificial Basis

Zhang Zenqun

ABSTRACT

This paper states how to get the linear programming by artificial basis and by this way to workout the general parametric sequence which can be effectively used after the input of some exact parameters and data if any linear programming problems appear in the modern industrial managent.