

文章编号: 1005- 8893 (2006) 03- 0040- 03

MAPLE 用于轴对称热传导问题边界奇异积分计算^{*}

薛国新¹, 王树立², 肖立川²

(1. 江苏工业学院 计算机科学与工程系, 江苏 常州 213164; 2. 江苏工业学院 机械工程系)

摘要: 轴对称热传导问题是能源动力工程中基本问题之一。对这类问题应用边界元法必然会遇到奇异积分, 其有效而准确的计算是关键。传统的处理方法是近似方法或积分变换方法将被积函数表示为简单形式的初等函数, 处理手段既不统一, 又不那么简洁。为此提出使用 MAPLE 软件处理轴对称热传导问题边界元奇异积分, 它将被积函数表示为多项式和椭圆函数乘积形式, 能使 MAPLE 直接算得对应积分的具体数值结果。这一方法程序处理统一, 简单明了, 便于推广应用。

关键词: MAPLE; 热传导; 边界元法; 奇异积分

中图分类号: TE 973. 101

文献标识码: A

Using MAPLE on the Calculation of Singular Boundary Integrations in Thermal Conduction Problems of Symmetrical Structures

XUE Guo- xin¹, WANG Shu- li², XIAO Li- chuan²

(1. Department of Computer Science and Technology, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164, China; 2. Department of Mechanical Engineering, Jiangsu Polytechnic University)

Abstract Thermal conduction of a symmetrical structure is a basic problem in power engineering. When a boundary element method is adopted for this kind of problem, singular integrations would be encountered. How to calculate them validly and accurately is a key point. Traditionally, the function to be integrated was expressed in a simpler form through math transformation or accumulation methods to ensure that it could be integrated out. These traditional methods are not unified, and are not brief, either. To this end, it presented a MAPLE based method for the calculation of the singular integrations. It expresses the function to be integrated as the product of a polynomial and an elliptic function. In this way the singular integration could be calculated out by MAPLE. The new method is brief and unified in form, and it is easy to be programmed. It is worth being popularized.

Key words: MAPLE; thermal conduction; boundary element method; singular integration

边界元法的计算中不可避免地会遇到奇异积分的计算^[1~3], 如何准确而有效地计算边界元法中的奇异积分早已成为人们所关心的热点课题。

对于轴对称热传导问题的边界元法, 所遇到的

奇异积分实际上是双重奇异积分, 它出现某种形式的定积分, 这种定积分的被积函数是椭圆函数, 其参数可能在某点达到 1。以采用二次等参插值为例, 若直接用数值方法进行积分, 由于计算机在计

* 收稿日期: 2006- 05- 22

基金项目: 中国石油化工股份有限公司资助项目 (J302001, X504007)

作者简介: 薛国新 (1962-), 男, 江苏武进人, 研究员, 《计算机仿真》编委, 主要研究方向为计算机应用等。

算中存在误差, 有可能在插值形函数参数的某一邻域内, 均将椭圆函数的参数当作 1, 于是造成计算机误认为在此邻域内被积函数恒为无穷大, 从而导致计算失败。为此, 人们提出了多种处理边界奇异积分的方法, 其主要思想是将被积函数中的椭圆函数因子以适当的初等函数近似, 以保证对应的不定积分能够积出, 通过不定积分计算定积分。

为了将椭圆函数用初等函数替代时有足够的精度, 需令形函数插值参数在一定的范围内变化; 对于不同的单元划分, 椭圆函数的参数对于形函数插值参数的导数是不相同的, 因此, 能用初等函数替代椭圆函数的范围也不相同。这使得计算程序不能以简洁而统一的形式实现。

MAPLE^[4,5] 具有强大的符号演算功能和处理不定积分及定积分的功能, 充分使用其计算能力在减少工作量, 简化和统一边界元奇异积分的计算方面具有重要意义。

1 边界奇异积分的处理

若用 MAPLE 指令采用数值方法直接计算边界奇异积分, 仍会遇到计算障碍。原因是在插值形函数的某一小邻域内, 计算机会误将椭圆函数的参数恒当作 1, 从而恒将被积函数当成无穷大, 导致计算失败。

如上所述, 传统方法不便于用程序以简洁而统一的形式实现。因此, 必须探讨在使用 MAPLE 软件的条件 下简便易行的方法。

轴对称热传导问题的边界积分方程可表为

$$C_s T_s + \int_{\Gamma} d\Gamma \int_0^{2\pi} T \left(q_{3D}^* + \frac{\alpha}{k} T_{3D}^* \right) r d\theta = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} q T_{3D}^* r d\Gamma d\theta \quad (1)$$

其中, 下标 s 表示源点, Γ 为三维区域的边界 Γ_{3D} 与 $r^+ - z$ 平面的交线, 而三维问题基本解的形式是

$$T_{3D}^* = \frac{1}{4\pi R_{3D}} \quad (2)$$

$$q_{3D}^* = \frac{\partial T_{3D}^*}{\partial n} = - \frac{1}{4\pi R_{3D}^2} \frac{\partial R_{3D}}{\partial n} \quad (3)$$

其中

$$R_{3D} = \sqrt{r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos \theta + (z - z_s)^2} \quad (4)$$

经推导可得

$$T_{as}^* = \int_0^{2\pi} T_{3D}^* d\theta = \frac{K(m)}{\pi \sqrt{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2}} \quad (5)$$

$$q_{as}^* = \int_0^{2\pi} q_{3D}^* d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial T_{3D}^*}{\partial n} d\theta = \frac{1}{\pi \sqrt{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2}} \times \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r_s^2 - r^2 + (z - z_s)^2}{(r - r_s)^2 + (z - z_s)^2} E(m) - K(m) \right] \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{z_s - z}{(r - r_s)^2 + (z - z_s)^2} E(m) \frac{\partial z}{\partial n} \right\} \quad (6)$$

以上两式中

$$m = \sqrt{\frac{4rr_s}{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2}} \quad (7)$$

于是有

$$C_s T_s + \int_{\Gamma} T r \left(q_{as}^* + \frac{\alpha}{k} T_{as}^* \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} q r T_{as}^* d\Gamma \quad (8)$$

(8) 式的右端项是

$$I_R = \int_{\Gamma} \frac{q r K(m) d\Gamma}{\pi \sqrt{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2}} \quad (9)$$

其中 m 如 (7) 式所示。

考虑采用二次等参插值的情况, 这时有

$$r = r_L X_1(\zeta) + r_M X_2(\zeta) + r_R X_3(\zeta) \quad (10)$$

$$z = z_L X_1(\zeta) + z_M X_2(\zeta) + z_R X_3(\zeta) \quad (11)$$

$$\text{其中 } X_1(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta (\zeta - 1), \quad X_2(\zeta) = (1 - \zeta) (1 + \zeta), \quad X_3(\zeta) = \frac{1}{2} (1 + \zeta) \zeta.$$

考虑源点 (r_s, z_s) 取为 (r_L, z_L) 的情形, 当 $\zeta = -1$ 时, $m = m(\zeta) = 1$ 。由于计算误差的作用, MAPLE 会在 $\zeta = -1$ 的一个右邻域内, 恒将 $m(\zeta)$ 当作 1, 于是恒将 $K(m)$ 当成无穷, 故不能用普通数值积分方法由 MAPLE 完成 I_R 的计算。

传统上, 将 $K(m)$ 在 $m = 1$ 附近表示成如下形式^[6]

$$K(m) = \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - m^2} \quad (12)$$

然后计算出 (9) 式被积函数的近似替代者

$\frac{q r \ln \frac{16}{1 - m^2}}{2\pi \sqrt{(r + r_s)^2 + (z - z_s)^2}}$ 的不定积分, 并由此计算出定积分之值。但是, 对于不同的边界元划分方法, 能够使用 (10) 式对 $K[m(\zeta)]$ 进行展开的 $\zeta = -1$ 的右邻域的大小是不一样的, 这样导致程序不能以简洁统一的形式实现, 为此, 提出如下的方法。

将 (9) 式改写成如下形状

$$I_R = \int_{-1}^1 Q(\zeta) K[m(\zeta)] d\zeta \quad (13)$$

其中

$$Q(\zeta) = \frac{qr(\zeta)J(\zeta)}{\pi[(r(\zeta) + r_s)^2 + (z(\zeta) - z_s)^2]^{1/2}} \quad (14)$$

式中, $r(\zeta)$, $z(\zeta)$ 为边界上的决定于 ζ 的径向和轴向坐标值, 分别由 (10) 式和 (11) 式给出, $J(\zeta)$ 是雅可比因子。对 $Q(\zeta)$ 进行样条插值, 将区间 $[-1, 1]$ 分为 n 个区间, 分点顺次为 $\zeta_0 = -1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n = 1$ 。设在第 i 个小区间 $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$ 内将 $Q(\zeta)$ 表为

$$Q(\zeta) \approx \sum_{j=0}^3 c_{ij} \xi^j, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

则有

$$I_R = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^3 c_{ij} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \xi^j K[m(\zeta)] d\zeta \quad (15)$$

而 MAPLE 能对形如 $\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \xi^j K[m(\zeta)] d\zeta$ 的定积分直接给出其精确数值结果, 故也能对 (15) 式所表示的定积分直接给出数值结果。

不难看出, (8) 式左端的积分可以整理成如下形状

$$I_L = I_K + I_E$$

$$I_K = \int_{-1}^1 f_K(\zeta) K[m(\zeta)] d\zeta$$

$$I_E = \int_{-1}^1 f_E(\zeta) E[m(\zeta)] d\zeta$$

对 $f_K(\zeta)$ 和 $f_E(\zeta)$ 分别采用样条插值函数表示, 即可用 MAPLE 直接得到 I_K 和 I_E 的数值结果, 从而也就得到 I_L 的数值结果。

2 结 论

奇异积分的处理是轴对称热传导问题边界元法中的难点之一。通过充分运用 MAPLE 软件处理椭圆函数定积分的能力, 得到了不同于传统手段的新技术。新技术表达简洁, 便于以统一形式的程序实现。采用人工和 MAPLE 软件相结合的方法, 能将人们从传统的研究方式中解放出来; 不仅能提高工作效率, 还可最大限度地减少由于疏漏而产生的错误。新技术可望用于一般的热传导边界元法的奇异积分计算之中。

参考文献:

- [1] Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Optimal Transformations of the Integration Variables in Computation of Singular Integrals in BEM [J]. Int J Number Methods Eng, 2000, 47: 1 263- 1 283.
- [2] Kouitat Njiwa R, Stebut JV. Boundary Element Numerical Modeling as a Surface Engineering Tool: Application to Very Thin Coatings [J]. Surface and Coatings Technology, 1999, 116 - 119: 573- 579.
- [3] Davey K, Hinduja S. Analytical Integration of Linear Three- Dimensional Triangular Elements in BEM [J]. Appl Math Model, 1989, 13: 450- 461.
- [4] 陈晓霞. 超强数学工具精点 Maple 指令参考手册 [M]. 第 1 版. 北京: 国防工业出版社, 2002.
- [5] 马开平, 冯玮, 潘申梅. 超强数学工具精点 Maple 高级应用和精典实例 [M]. 第 1 版. 北京: 国防工业出版社, 2002.
- [6] 姚寿广. 边界元数值分析及其应用 [M]. 第 1 版. 北京: 国防工业出版社, 1995.