文章编号：2095－0411（2011）01－0056－03

不连续条件下二阶常微分方程终值问题解的存在性*

俞亚娟[1]，滕兴虎[2]
（1. 常州大学 数理学院，江苏 常州 213164；2. 中国人民解放军理工大学 理学院，江苏 南京 211101）

摘要：讨论了 Banach 空间中无穷区间上不具连续性条件的二阶常微分方程终值问题解的存在性。在函数不具连续性的条件下，利用上下解方法，证明了二阶常微分方程至少存在两个解。最后给出一个例子说明主要结果的可行性。

关键词：锥；半序；上下解；终值问题
中图分类号：O 175.8　　　**文献标识码**：A

Existence of the Solution to the Terminal Value Problems for Second Order Differential Equations with Discontinuous Condition

YU Ya－juan[1]，TENG Xing－hu[2]
（1. School of Mathematics and Physiscs，Changzhou University，Changzhou 213164，China；2. Institute of Science，Chinese People′s Liberation Army University of Science and Technology，Nanjing 211101，China）

Abstract：The terminal value problems on infinite interval in Banach spaces for second order differential equations with discontinuous condition are investigated. Using the method of the upper and lower solution，it is proved that the second order differential equations have at least two solutions under discontinuous condition. An example is given to illustrate the feasibility of the main result.

Key words：cone；semi－order；the upper and lower solution；the terminal value problems

1 预备知识

常微分方程是数学中一个古老而又重要的分支，它在自然科学和工程中有着广泛的应用。文献［1］讨论了方程右端函数连续时的一阶微分方程的终值问题，文献［2－5］讨论了 Banach 空间中一阶，二阶微分方程的终值问题，但都要求方程右端函数是连续的。而在大多数实际应用中，函数的连续性很难满足。本文在方程右端函数不连续的条件下，应用上下解方法给出终值问题（1）的解的存在性，最后给出一个应用。

$$\begin{cases} u''(t)=f(t,u(t)),\ t\in R^+ \\ u(+\infty)=u_\infty,\ u'(+\infty)=0 \end{cases} \tag{1}$$

记 $L_p(R^+,R)=\{x(t):x(t)$ 可测且 $\int_0^{+\infty}|x(t)|^p dt<+\infty\}$，任意 $x\in L_p(R^+,R)$，定义 $\|x\|_{L_p}=(\int_0^{+\infty}|x(t)|^p dt)^{1/p}$，则 $L_p(R^+,R)$ 在此范数下是 Banach 空间，且 $1<p<+\infty$ 时，$L_p(R^+,R)$ 是自反空间。

记 $LC^2(R^+,R)=\{x(t):x(t)\in C^2(R^+,R),\ \lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_\infty,\ \lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)=0\}$，

* 收稿日期：2010－09－21
作者简介：俞亚娟（1978－），女，江苏常州人，硕士。

任意 $x\in LC^2(R^+,R)$，定义 $\|x\|_{LC^2}=\sup\limits_{t\in R^+}|x(t)|$，则 $LC^2(R^+,R)$ 在范数 $\|x\|_{LC^2}$ 下也是 Banach 空间。记

$P=\{x(t)\in L_p(R^+,R):x(t)\leqslant 0,\ t\in R^+\}$，

$P_1=\{x(t)\in LC^2(R^+,R):x(t)\leqslant 0,\ \forall t\in R^+\}$，

则 P 及 P_1 分别为 $L_p(R^+,R)$ 及 $LC^2(R^+,R)$ 的锥，且锥 P 和锥 P_1 导入的半序与通常的自然半序是一致的。

定义 1：设 P 是 Banach 空间 E 的锥，若存在常数 $N>0$，当 $\theta\leqslant x\leqslant y$（$\theta$ 为 E 的零元）有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$，则称 P 是正规锥，其中 N 称为 P 的正规常数。

引理 2[6]：设 P 是 E 中的一个锥，则下列结论相互等价：①P 是正规锥；②存在 E 上的等价范数 $\|\cdot\|_1$ 满足 $\theta\leqslant x\leqslant y$ 时有 $\|x\|_1\leqslant\|y\|_1$，即范数 $\|\cdot\|_1$ 是单调的；③任何序区间 $[x,y]=\{z\in E,\ x\leqslant z\leqslant y\}$ 有界。

注：有关锥的更详细的内容参见文献［6］。

定理 3：P 及 P_1 分别为 $L_p(R^+,R)$ 及 $LC^2(R^+,R)$ 的正规锥。

证：由 $\|x\|_{L_p}$ 及 $\|x\|_{LC^2}$ 的定义可知，范数 $\|\cdot\|_{L_p}$ 及范数 $\|\cdot\|_{LC^2}$ 均为单调的，由引理 2 得证。

定义 4：设 $v_0(t)$，$\omega_0(t)\in LC^2(R^+,R)$，若

$v''_0(t)\leqslant f(t,v_0(t))$，$0\leqslant v'_0(+\infty)$，

$v_0(+\infty)\leqslant u_\infty$

$\omega''_0(t)\geqslant f(t,\omega_0(t))$，$0\geqslant\omega'_0(+\infty)$，

$\omega_0(+\infty)\geqslant u_\infty$

则称 $v_0(t)$，$\omega_0(t)$ 是初值问题（1）的下解和上解。

引理 5[1]：设 E 是半序 Banach 空间，x_0，$y_0\in E$，$x_0\leqslant y_0$，$D=[x_0,y_0]$，$A:D\to E$ 是一个算子，设存在另一个半序 Banach 空间 E_1 及算子 $B:D\to E_1$ 和算子 $C:[Bx_0,By_0]\to E$ 使得 $A=CB$ 满足下列条件：①B 和 C 都是增算子；②x_0 是 A 的下解（即 $x_0\leqslant Ax_0$），y_0 是 A 的上解（即 $y_0\geqslant Ay_0$）；③P_1 是 E_1 中的正规锥，$B(D)$ 是 E_1 中的相对弱列紧集；则 A 在 D 中必有最小不动点 x 和最大不动点 y（即 x，y，z 均是 A 的不动点，则有 $x\leqslant y\leqslant z$）。

引理 6[1]：设 E 是自反空间，P 是正规锥，M 是 E 中的全序集，则 M 相对弱列紧当且仅当 M 是有界集。

2 主要结果

定理 7：设下列条件成立：①存在 $v_0(t)$，$\omega_0(t)\in LC^2(R^+,R)$，使得 $v_0(t)$，$\omega_0(t)$ 分别是初值问题（1）的下解和上解，且对所有 $t\in R^+$，有 $v_0(t)\leqslant\omega_0(t)$；②若 $v_0(t)\leqslant y(t)\leqslant x(t)\leqslant\omega_0(t)$，有 $f(t,x)-f(t,y)\geqslant 0$；③存在 $p>1$，使得算子 $F(u)=:f(t,u(t))$ 映

$D=\{u\in LC^2(R^+,R):v_0(t)\leqslant u(t)\leqslant\omega_0(t),\ t\in R^+\}$ 入 $L_p(R^+,R)$；则初值问题（1）在 D 中有最小解和最大解。

证：显然，初值问题（1）的解等价于在 D 中求下列非线性积分方程的解：

$$h(t)=u_\infty-\int_t^{+\infty}(t-s)f(s,h(s))\mathrm{d}s \qquad (2)$$

令

$$A(h)=u_\infty-\int_t^{+\infty}(t-s)f(s,h(s))\mathrm{d}s \qquad (3)$$

定义 D 上的算子 B：

$B(h)=f(t,h(t))$，$h\in D$。

由条件（2）及条件（3），有 $B:D\to L_p(R^+,R)$ 为增算子，故 $B(D)=[Bv_0,B\omega_0]$。P_1 是正规锥，从而 $B(D)$ 有界，又 $L_p(R^+,R)$ 自反，由引理 6，$B(D)$ 是 E_1 中的相对弱列紧集。再定义 $L_p(R^+,R)$ 上的算子 C：

$$C(u)=u_\infty-\int_t^{+\infty}(t-s)u(s)\mathrm{d}s\ ,$$

$$u\in L_p(R^+,R) \qquad (4)$$

则 $C:L_p(R^+,R)\to LC^2(R^+,R)$。对任意 $u_1(t)$，$u_2(t)\in L_p(R^+,R)$，且 $u_1(t)\leqslant u_2(t)$ 有

$$C(u_1)-C(u_2)=\int_t^{+\infty}(t-s)u_1(s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}(t-s)u_2(s)\mathrm{d}s=\int_t^{+\infty}(t-s)[u_1(s)-u_2(s)]\mathrm{d}s\leqslant 0$$

即 $C(u_1)\leqslant C(u_2)$，故 C 是增算子，且有 $A(h)=CB(h)$。

在引理 5 中取 $E=LC^2(R^+,R)$，$E_1=L_p(R^+,R)$，P，P_1 为 E 和 E_1 的锥。

下证 $v_0\leqslant Av_0$，$A\omega_0\leqslant\omega_0$，记 $v_1=Av_0=u_\infty-\int_t^{+\infty}(t-s)f(s,v_0(s))\mathrm{d}s$，则

$v'_1(t) = -\int_t^{+\infty} f(s, v_0(s))\mathrm{d}s$，

$v''_1(t) = f(t, v_0(t))$。

记 $m(t) = v_1(t) - v_0(t)$，则

$m(+\infty) = v_1(+\infty) - v_0(+\infty) = 0$，且

$m'(t) = -\int_t^{+\infty} f(s, v_0(s))\mathrm{d}s - v'_0(t)$，

$m'(+\infty) = -v'_0(+\infty) \leqslant 0$，$m''(t) = f(t, v_0(t)) - v''_0(t) \geqslant 0$,，从而 $m'(t)$ 单调递增，又 $m'(+\infty) \leqslant 0$，故 $m'(t) \leqslant 0$，即 $m(t)$ 单调递减。又 $m(+\infty) = v_1(+\infty) - v_0(+\infty) = 0$，从而 $m(t) \geqslant 0$，故得 $v_0(t) \leqslant v_1(t)$，即 $v_0(t) \leqslant Av_0(t)$。同理可证

$A\omega_0(t) \leqslant \omega_0(t)$，再由引理 5 可知，初值问题（1）在 D 中必有最小解和最大解。

注：定理中对 $f(t, x)$ 没有假定任何连续性条件，但给出初值问题（1）有最大和最小连续解。

3 应 用

讨论下面终值问题

$$\begin{cases} u''(t) = \mathrm{e}^{-2t}(u + 3\arctan u), \ t \in R^+ \\ u(+\infty) = 0, \ u'(+\infty) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

结论：问题（5）至少有一个非零解。

证明：显然 $u(t) = 0$ 是（5）式的解。此时，有 $f(t, u) = \mathrm{e}^{-2t}(u + 3\arctan u)$。取

$v_0(t) = 0$，$\omega_0(t) = \mathrm{e}^{-2t}$，则

$v''_0(t) = 0 = f(t, v_0(t))$，$v'_0(+\infty) = 0$，

$v''_0(+\infty) = 0$，

$f(t, \mathrm{e}^{-2t}) = \mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{e}^{-2t} + 3\arctan \mathrm{e}^{-2t}) \leqslant$

$4\mathrm{e}^{-2t} = \omega''_0(t)$，

$\omega'_0(+\infty) = 0$，$\omega''_0(+\infty) = 0$，从而

$v_0(t) = 0$，$\omega_0(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ 是问题（5）的上解和下解，从而定理 7 的条件①满足；由于 $\mathrm{e}^{-2t} \in L_2(R^+, R)$，从而定理 7 的条件③满足；定理 7 的条件②显然成立。再由定理 7 得问题（5）至少有一个非零解。

参考文献：

［1］郭大钧，孙经先，刘兆理．非线性常微分方程泛函方法［M］．济南：山东科学技术出版社，2006.

［2］周友民．Banach 空间一阶微分方程终值问题的解［J］．系统科学与数学，1999，19（03）：264－267.

［3］周友民．Banach 空间二阶非线性微分方程终值问题［J］．工程数学学报，2004，21（06）：953－958.

［4］肖艳萍，张申贵．Banach 空间中一阶终值问题解的存在性［J］．甘肃联合大学学报，2006，20（03）：17－19.

［5］朱传喜，叶梅燕，郭玲．关于终值微分方程的解［J］．西安交通大学学报，2005，39（12）：1 384－1 386.

［6］郭大钧．非线性泛函分析［M］．济南：山东科学技术出版社，2000.