

文章编号: 1005-8893 (2000) 02-0060-03

压杆临界力实验方法^{*}

谈梅兰

(江苏理工大学 理学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 众所周知, 用实验方法测压杆临界值是有一定困难的。Southwell 在他的名著 *An Introduction to the Theory of Elasticity*, P. 429 提出了一个方法来解决这个问题。对 Southwell 的方法加以进一步的分析后, 得到了一个既简便又更精确的用实验测压杆临界力的方法。

关键词: 压杆; 中点偏移; 临界力

中图分类号: O 341

文献标识码: A

压杆稳定实验时, 由于压力 P 很难做到沿压杆轴线, 即刚开始受压, 压杆就在微弯状态下保持平衡, 不可能性直接测出压杆的临界力。本文给出的方法令人满意, 只需由实验测出四组压力及相应的压杆中点偏移值即可根据文中给出的公式算得较为精确的临界力 P_{cr0} 。

1 问题的提出

进行压杆稳定实验时, 有两个现象是不可避免的:

- (1) 压杆不可能是直的;
- (2) 外力不可能通过每一截面的形心。

先考虑第一个现象所产生的后果。由 Dirichlet 定理, 在本问题的具体条件下, 完全可以有傅氏级数代表任意的 (实际上是未知的) 压杆初始形状曲线如下:

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1)$$

式中: l 为杆长, n 为正整数。

以图 1 所示的简支压杆为例, 压力为 P , EI 为抗弯刚度, $y=f(x)$ 为受压后杆之曲线方程, 则:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} (y - y_0) + Py = 0$$

或:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = EI \frac{d^2 y_0}{dx^2} \quad (2)$$

式 (2) 的右侧表示由第二个现象即偏压现象产生的弯矩 $M(x)$, 它可以展开成傅氏级数^[1]。现将 y 也用傅氏级数表示:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

其中系数待定。

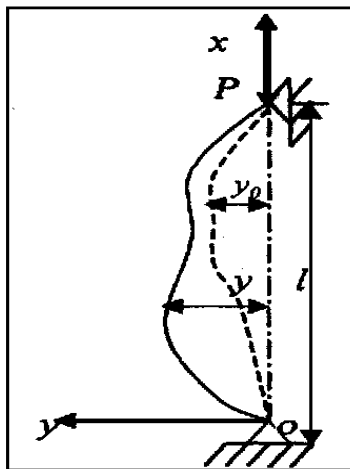


图 1 简支压杆

将式 (1)、式 (3) 代入式 (2) 得:

* 收稿日期: 2000-04-21

作者简介: 谈梅兰 (1959-), 女, 江苏溧阳人, 讲师, 主要从事力学方面的研究。

$$A_n = \frac{a_n}{1 - \frac{Pl^2}{EIn^2\pi^2}} = \frac{a_n}{1 - \frac{P}{n^2 P_{cr}}}$$

所以

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - \frac{P}{n^2 P_{cr}}} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{a_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{a_2}{1 - \frac{P}{4P_{cr}}} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{a_3}{1 - \frac{P}{9P_{cr}}} 3 \sin \frac{\pi x}{l} + \dots \quad (4)$$

这里 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 为欲测定之值。压杆中点 y 值为:

$$y|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{a_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} - \frac{a_3}{1 - \frac{P}{9P_{cr}}} + \frac{a_5}{1 - \frac{P}{25P_{cr}}} - \dots \quad (5)$$

压力 P 由零逐渐增大, 当 P 接近 P_{cr} 时, 式 (5) 可写成:

$$y|_{x=\frac{l}{2}} \approx \frac{a_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (6)$$

设压杆中点实测偏移为 Δ , 则

$$\Delta = (y - y_0)_{x=\frac{l}{2}, P \rightarrow P_{cr}} \approx \frac{a_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} - a_1 = \frac{Pa_1}{P_{cr} - P}$$

或

$$P_{cr} \Delta - Pa_1 = P \Delta \quad (7)$$

式 (7) 是一个近似关系式, 也只有当 P 接近于 P_{cr} 时才成立。它表示的 $P - \Delta$ 曲线是一条双曲线。

式 (7) 还可改写成下列形式:

$$P_{cr} (\Delta/P) - \Delta = a_1 \quad (8)$$

以 Δ 为横轴, 以 Δ/P 为纵轴, 显然式 (8)

是一直线方程, 其斜率 $\frac{d(\Delta/P)}{d\Delta} = \frac{1}{P_{cr}}$, 此直线与 Δ 轴之交点的 $\Delta = -a_1$, Southwell^[2] 根据式 (8) 提出将一系列 Δ 、 P 的观测值画成图形, 若 P 接近于 P_{cr} 时, $\Delta/P \sim \Delta$ 图将为一条直线, 量出此直线的坡度, 然后可得出 P_{cr} 值。根据 Southwell 的办法解题求 P_{cr} , 要测较多个 P 、 Δ 的值, 还需计算、作图、量坡度, 工作量较大, 同时 P 与 P_{cr} 相差甚远时式 (8) 失效。为了解决这一问题, 提出如下的方法。

2 临界力实验计算公式

为了估计式 (8) 的误差, 设式 (1) 中 $a_1 = 0.1$, $a_3 = 5a_1 = 0.5$, $a_5 = 10a_1 = 1$, $P_{cr} = 100$ 压杆中点 y_0 为 (取前 3 项):

$$y_0|_{x=\frac{l}{2}} = a_1 - a_3 + a_5 \quad (9)$$

式 (5)、式 (9) 得

$$\Delta = \frac{a_1 P}{P_{cr} - P} - \frac{a_3 P}{9P_{cr} - P} + \frac{a_5 P}{25P_{cr} - P} = \frac{0.1P}{100 - P} - \frac{0.5P}{900 - P} + \frac{P}{2500 - P} \quad (10)$$

据式 (10) 计算得表 1。

表 1 压力 P 与偏移 Δ 的关系

P	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95
Δ	0.009 5	0.217 0	0.037 8	0.059 7	0.091 0	0.138 9	0.219 9	0.384 3	0.881 7	1.881 0
Δ/P	0.000 95	0.001 09	0.001 26	0.001 49	0.001 82	0.002 32	0.003 14	0.004 80	0.009 80	0.019 80

据表 1 数据可作 $\Delta/P - \Delta$ 图, 还可以看出 $P > 70$ 后, Δ 与 Δ/P 近似地成比例关系, 也即直线关系, 但 $P < 70$ 时 Δ 与 Δ/P 不成比例关系, 原因是式 (10) 右边的第 2、第 3 项的数对 Δ 值的作用较大, 不可忽略。现设 Δ 与 Δ/P 成直线关系, (即 $P \rightarrow P_{cr}$ 时) 则 a_3 、 a_5 可忽略在不计, 式 (7) 成立。取两对实验数值 P_1 、 Δ_1 及 P_2 、 Δ_2 代入式 (7), 则可解出:

$$P_{cr} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_2/P_2 - \Delta_1/P_1}$$
$$a_1 = \frac{P_2 - P_1}{P_1/\Delta_1 - P_2/\Delta_2} \quad (11)$$

当然 P_1 、 P_2 要取接近于 P_{cr} (未知量) 之值。

据表 1 数据得出:

(1) 取 $P_1 = 80$, $\Delta_1 = 0.384 3$; $P_2 = 95$, $\Delta_2 = 1.881 0$, 由式 (11) 得 $P_{cr} = 99.8$, 误差为 0.2% ;

(2) 取 $P_1 = 50$, $\Delta_1 = 0.091 0$; $P_2 = 80$, $\Delta_2 = 0.384 3$, 则 $P_{cr} = 98.3$, 误差为 1.7% ;

(3) 取 $P_1 = 20$, $\Delta_1 = 0.021 7$; $P_2 = 50$, $\Delta_2 = 0.091 0$, 则 $P_{cr} = 94.3$, 误差为 5.7% 。

3 结 论

不论用 Southwell 的作图法或是用公式 (11) 去求 P_{cr} , 结果的可靠性均决定于 P 与 P_{cr} 的接近程度, 显然用公式 (11) 进行计算工作量较小, 而

且所进行的实验是非破坏性实验^[3]。

建议用下列方法进行实验:

(1) 先实验出两组数据 (P_1, Δ_1) ; (P_2, Δ_2) ;

(2) 用式 (11) 计算 P_{cr} ;

(3) 用两个接近于算得的 P_{cr} 的压力 P 进行实验又可得两组数据;

(4) 用新的两组数据代入式 (11) 去计算 P_{cr} , 这样就得到较精确的临界力。

参考文献:

- [1] Stephen P. Timoshenko Mechanics of Materials [M]. New York: Litton Educational Publishing, INC, 1972. 338—340.
- [2] Southwell R V. An Introduction to the Theory of Elasticity [M]. London: Oxford University Press, 1941. 426—430.
- [3] 荆广生. 孙锁泰. 材料力学 [M]. 南京: 东南大学出版社, 1994. 216—219.

The Experimental Method of the Critical Load of a Column

TAN Mei-lan

(Faculty of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: It is well known that to obtain the critical load of a column experimentally is rather difficult. Southwell proposed a method to solve this problem in his famous book “An Introduction to the Theory of Elasticity” P429. Southwell’s method is discussed again and an improved method is proposed. By this method the critical load could be obtained more easily and accurately.

Key words: column; critical load; excursion of midpoint

本 刊 声 明

为适应我国信息化建设需要, 扩大作者学术交流渠道, 本刊已加入《中国学术期刊 (光盘版)》和“中国期刊网”。作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付。如作者不同意将文章编入该数据库, 请在来稿时声明, 本刊将做适当处理。