第12卷第2期 江苏石油化工学院学报 Vol. 12 No. 2
2000年6月 JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY Jun. 2000

文章编号：1005－8893（2000）02－0063－02

完全偶图的 P_{2p}——分解*

许定亮
（常州市职工大学 基础课部，江苏 常州 213016）

摘要：利用图论中关于偶图的一个结论“$K_{s,s}$是1－可因子分解的”构造出当$K_{m,m}$有一个P_{2p}——分解时，$K_{ms,ms}$也有一个P_{2p}——分解（当s是正整数）。进一步我们还证明了$K_{m,n}$有一个P_{2p}——分解，当且仅当 ⅰ> $m=n$，ⅱ> $m\equiv 0$（mod$p$（$2p-1$））。

关键词：完全偶图；生成子图；可分解
中图分类号：O 157.6 文献标识码：A

引 言

用组合的方法去解决图论中完全偶图$K_{m,n}$和多重偶图$\lambda K_{m,n}$的各种分解问题，近年来随着计算机科学的迅速发展，已逐步走向深入，如$K_{m,n}$的$K_{1,2}$星分解，$\lambda K_{m,n}$的$K_{1,k}$星分解，P_3——分解[1]，P_4——分解等等。本文将给出完全偶图P_{2p}——分解的充分必要条件。

以下设$K_{m,n}$是一个完全偶图，其两部分分别有m和n个顶点。对正整数p，$2p$个顶点上的一条路用P_{2p}表示。如果$K_{m,n}$的一个子图F包含所有$K_{m,n}$的顶点，则称之$K_{m,n}$的一个生成子图。若$K_{m,n}$的一个P_{2p}－因子是$K_{m,n}$的一个生成子图，则F的每一个分支就是一个P_{2p}。显然不孤立顶点的一个图是被它的边集合唯一决定的。因此，在本文中，我们认为不孤立顶点的一个图是它的顶点的2－元素集合的一个集合。$K_{m,n}$的一个P_{2p}——分解是$K_{m,n}$的边划分集合的两两不相交P_{2p}－因子的一个集合。

1 引理及证明

引理1.1 $K_{s,s}$是1－可因子分解的

证明：为叙述方便，把$K_{s,s}$的顶点的分划（X，Y）中的X，Y的顶点分别加以0，1，2…，$s-1$的编号。记（i，j）是X中的i和Y中的j相连的边。显然｛i，$i+k$（mod$s$）｝（$i=0$，1，2…，$s-1$）是$K_{s,s}$中的1－因子，且不同的k对应$K_{s,s}$中边不相交的不同1－因子。当k取遍0，1，2，…，$s-1$时，$K_{s,s}$中的边亦被取尽，故$K_{s,s}$是1－可因子分解的。

引理1.2 如果$K_{m,m}$有一个P_{2p}——分解，那么$K_{ms,ms}$有一个P_{2p}——分解（当s是正整数）。

证明：我们可以概括如何去构造一个$K_{ms,ms}$的P_{2p}——分解[2]。

因为$K_{s,s}$是1－可分解的。让F_i（$1\leqslant i\leqslant s$）是它的一个1——分解。对每一个$1\leqslant i\leqslant s$用一个$K_{m,m}$代替每一个F_i的边，得到一个$K_{ms,ms}$的生成子图G_i，那么G_i（$1\leqslant i\leqslant s$）是两两边不相交的且他们的和是$K_{ms,ms}$。

对每一个$1\leqslant i\leqslant s$，因为$K_{m,m}$是P_{2p}——可分解的，G_i也是P_{2p}——可分解的，因此$K_{ms,ms}$是P_{2p}——可分解的。

2 主要定理及其证明

定理2.1 $K_{m,n}$有一个P_{2p}——分解当且仅当$m=$

* 收稿日期：2000－03－30
作者简介：许定亮（1964－），男，江苏南京人，讲师，主要从事组合数学方面的研究。

n 和 $m\equiv 0$（mod$p$（$2p-1$））。

证明（必要性）：假设 $K_{m,n}$ 有一个 P_{2p}－因子 F 且 F 有 t 部分，那么 $m=pt=n$ 且 $|F|=m$（$2p-1$）/p 是一个整数，不依赖单独的 P_{2p}－因子（参见图 1）。

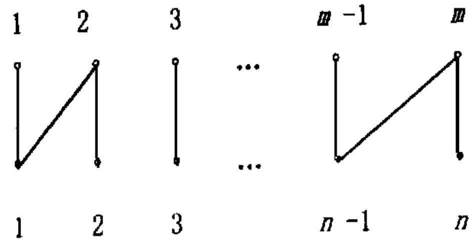

图 1 在 $m=n$，$p=2$ 时的 $K_{m,n}$

因此，如果 $K_{m,m}$ 是 P_{2p}——可分解的。那么，m^2/〔m（$2p-1$）/p〕是一个整数，那么 pm/（$2p-1$）是一个整数。因为（p，$2p-1$）$=1$，m/（$2p-1$）一定是一个整数，所以 $m\equiv 0$（mod$p$（$2p-1$））。

（充分性）：假设 $m=n$ 且 $m\equiv 0$（mod$p$（$2p-1$）），让 $m=p$（$2p-1$）s（对正整数 s），让 $q=2p-1$，由引理 1.2，仅需证明 $K_{pq,pq}$ 是 P_{2p}——可分解的。让 X 和 Y 是 $K_{pq,pq}$ 的两个部分且集合

$X=\{x_{i,j}|1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q\}$

$Y=\{y_{i,j}|1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q\}$ 我们构造 P_{2p}－因子且注意到在前面附加在 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 的第一个下标是在 $\{1,2,\cdots,p\}$ 中取模 p，且附加在第二个下标是在 $\{1,2,\cdots,q\}$ 中取模 q。让

$E_{2i-1}=\{x_{i,j}\quad y_{i,(j+2i-2)}|1\leqslant j\leqslant q\}$，$1\leqslant i\leqslant p\}$

$E_{2i-2}=\{x_{i,j}\quad y_{(i-1),(j+2i-3)}|1\leqslant j\leqslant q\}$，$2\leqslant i\leqslant p\}$

当每一个 $1\leqslant j\leqslant q$，我们等同 $x_{i,j}$ 作为 x_j 且 $y_{i,j}$ 作为 y_j，对所有 $1\leqslant i\leqslant p$，那么 E_k（$1\leqslant k\leqslant q$）应该是一个 $K_{q,q}$ 的一个 1－分解。

现在，让 $F=\bigcup_{k=1}^{q}E_k$，那么 F 是 $K_{pq,pq}$ 的一个 P_{2P}－因子。定义一个双射 б 从 $X\cup Y$ 到 $X\cup Y$，在如此的方式：б（$x_{i,j}$）$=X_{i+1,j}$ 且 б（$y_{i,j}$）$=y_{i+1,j}$，当所有 $1\leqslant i\leqslant p$ 和 $1\leqslant j\leqslant q$。当每 $1\leqslant i$，$j\leqslant p$，让：$F_{i,j}=\{б^i(x)б^j(y)|x\in X$，$y\in Y$，$xy\in F\}$（参见图 2，在 $p=2$，$q=3$ 时 $K_{6,6}$ 情形）。

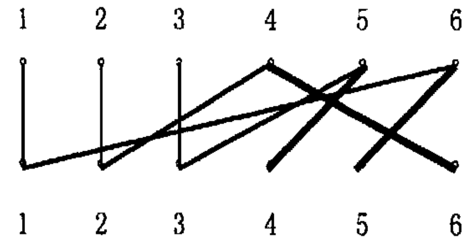

图 2 在 $p=2$，$q=3$ 时 $K_{6,6}$

易见，$F_{i,j}$（$1\leqslant i$，$j\leqslant p$）是两两不相交 $K_{pq,pq}$ 的 P_{2p}－因子且它们的和是 $K_{pq,pq}$。

综上所述，定理 2.1 证毕。

参考文献：

[1] Du B. P_3－factorization of Complete Multipartite Multigraph Applied Math－A [J]. Journel of Chinese Universities, 1999, 14B: 122－124.

[2] Ushio K. P_3－factorization of Complete Bipartite Graphs [J]. Discrete Math, 1988, 72: 361－366.

P_{2p}——Factorization of a Complete Bipartite Graph

XU Ding－liang
(Department of Basic Science, Changzhou Workers' University, Changzhou 213015, China)

Abstract: By use of a result of bipartite graphs in the graph theory "$K_{s,s}$ is 1－factorizable", we concluded that if $K_{m,m}$ has a P_{2p}－factorization, then $K_{ms,ms}$ has a P_{2p}－factorization (for any positive integers). We also proved $K_{m,n}$ has a P_{2p}－factorization if and only if ⅰ> $m=n$,, ⅱ> $m\equiv 0$ (mod$p$ ($2p-1$)).

Key words: complete bipartite graph; spanning subgraph; factorizable