文章编号：1005－8893（2000）04－0056－03

关于矩阵方程 $AXB+CYD=E$ 的解*

李志林
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：在最优控制、统计分析等理论和应用领域中，常常提出形如 $AXB+CYD=E$ 的矩阵方程，利用矩阵的Kronecker积，可以把矩阵方程 $AXB+CYD=E$ 化为等价的线性方程组形式，再根据两块阵的广义逆表示式给出这类矩阵方程相容的充分必要条件和矩阵方程解的一般形式。

关键词：Kronecker积；矩阵的广义逆；矩阵方程
中图分类号：O 151.21　　　　文献标识码：A

在最优控制、统计分析等理论和应用领域中，常常提出形如 $AXB+CYD=E$ 的矩阵方程，在理论上已经建立了这类矩阵方程的相容性条件，见文献[1~3]。文中利用矩阵的Kronecker积和两块阵 g^- 逆表示从另一个途径给出了这类矩阵方程的类似结论，同时给出了矩阵方程 $AXB=E$ 和 $CXD=F$ 有公共解的充要条件和解的一般形式。

文中记号和术语见文献[4]。A^- 表示矩阵 A 的一个 g^- 逆，对任意矩阵 T，E_T 表示 $I-TT^-$，F_T 表示 $I-T^-T$，$A\otimes B$ 表示矩阵 A、B 的Kronecker积，$\vec{A}$ 表示矩阵A的按行拉直，I表示单位矩阵。

引理1[4]　$\overrightarrow{ABC}=(A\otimes C^{T})\vec{B}$。

引理2[4]　矩阵方程 $AX=B$ 相容当且仅当 $AA^-B=B$，当该方程相容时，通解为 $X=A^-B+F_AH$，H 为任意矩阵。

引理3[5]　设 $A\in R^{m\times n}$、$B\in R^{m\times p}$、$C\in R^{q\times n}$，则

$$[A,B]^-=\begin{bmatrix}A^-(I-B(E_AB)^-E_A)\\(E_AB)^-E_A\end{bmatrix}$$

$$[A,B]^-[A,B]=\begin{bmatrix}A^-A & A^-B(I-(E_AB)^-(E_AB))\\0 & (E_AB)^-E_AB\end{bmatrix}$$

$$[A,B][A,B]^-=AA^-+E_AB(E_AB)^-E_A$$

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}^-=[(I-F_A(CF_A)^-C)A^-,\ F_A(CF_A)^-]$$

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=A^-A+F_A(CF_A)^-CF_A$$

$$\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}^-=\begin{bmatrix}AA^- & 0\\(I-CF_A(CF_A)^-)CA^- & CF_A(CF_A)^-\end{bmatrix}$$

主要结论有下列定理。

定理1　设 $A\in R^{m\times n}$、$B\in R^{p\times q}$、$C\in R^{m\times r}$、$D\in R^{s\times q}$、$E\in R^{m\times q}$，则下列方程

$$AXB+CYD=E \tag{1}$$

有解 $X\in R^{n\times p}$、$Y\in R^{r\times s}$ 的充要条件是

$$AA^-EB^-B-AA^-CG^-E_AED^-DB^-B-AA^-CF_GC^-EF_BH^-DB^-B+CG^-E_AED^-D+CF_GC^-EF_BH^-D=E \tag{2}$$

其中 $G\equiv E_AC$，$H\equiv DF_B$。当（2）式成立时，（1）式有特解

$$X_0=A^-EB^--A^-CG^-E_AED^-DB^--A^-CF_GC^-EF_BH^-DB^- \tag{3}$$

$$Y_0=G^-E_AED^-+F_GC^-EF_BH^- \tag{4}$$

* 收稿日期：2000－11－11
作者简介：李志林（1964－），男，江苏连云港人，讲师，主要从事矩阵论方面的研究。

此时，（1）式的解的一般形式是

$$X=X_0+U-A^-AUBB^--A^-CF_GVE_HDB^- \tag{5}$$

$$Y=Y_0+V-G^-GVDD^--F_GC^-CVHH^- \tag{6}$$

其中 $U\in R^{n\times q}$、$V\in R^{r\times s}$是任意的。

证明　由引理 1，（1）式等价于线性方程组

$$[A\otimes B^{T},\ C\otimes D^{T}]\begin{bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\end{bmatrix}=\vec{E} \tag{7}$$

记

$$M=[A\otimes B^{T},\ C\otimes D^{T}],\ N=\begin{bmatrix}N_1\\ N_2\end{bmatrix}$$

其中：$N_1=A^-\otimes B^{-T}-(A^-\otimes B^{-T})(C\otimes D^{T})(G^-E_A\otimes D^{-T}+F_GC^-\otimes(F_BH^-)^{T})$，$N_2=G^-E_A\otimes D^{-T}+F_GC^-\otimes(F_BH^-)^{T}$

注意到下列诸等式

$GC^-C=G$，$DD^-H=H$，$CF_GC^-C=CF_G$，$AA^-C=C-G$

我们有

$$MN=AA^-\otimes(B^-B)^{T}-(AA^-\otimes(B^-B)^{T})(C\otimes D^{T})(G^-E_A\otimes D^{-T}+F_GC^-\otimes(F_BH^-)^{T})+CG^-E_A\otimes(D^-D)^{T}+CF_GC^-\otimes(F_BH^-D)^{T} \tag{8}$$

经过验算可知

$MN(A\otimes B^{T})=A\otimes B^{T}$，$MN(C\otimes D^{T})=C\otimes D^{T}$，

所以

$MNM=MN[A\otimes B^{T},\ C\otimes D^{T}]=[A\otimes B^{T},\ C\otimes D^{T}]=M$，

可见 N 是M 的 g^-逆。由引理 2，方程（7）相容当且仅当 $MN\vec{E}=\vec{E}$，应用引理 1，从（8）式立即可得（2）式。当方程（7）相容时，得到它的一个特解$\begin{bmatrix}\vec{X_0}\\ \vec{Y_0}\end{bmatrix}$，其中：$\vec{X_0}=(A^-\otimes B^-)\vec{E}-(A^-CG^-E_A\otimes(D^-DB)^{T})\vec{E}-(ACF_GC^-\otimes(F_BH^-DB^-)^{T})\vec{E}$，$\vec{Y_0}=(G^-E_A\otimes D^{-T})\vec{E}+(FGC^-\otimes(F_BH^-)^{T})\vec{E}$

应用引理 1，便得到（3）式和（4）式，经直接计算得

$$NM=\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}$$

其中：$N_{11}=AA^-\otimes(BB^-)^{T}$，$N_{12}=A^-CF_G\otimes(E_HDB^-)^{T}$，$N_{21}=0$，$N_{22}=G^-G\otimes(DD^-)^{T}+F_GC^-C\otimes(DF_BH^-)^{T}$，

由引理 2，方程(7)的一般解为

$$\begin{bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{X_0}\\ \vec{Y_0}\end{bmatrix}+(I-NM)\vec{Z},$$

其中 $\vec{Z}$ 是任意的，按相应分块记 $\vec{Z}=\begin{bmatrix}\vec{U}\\ \vec{V}\end{bmatrix}$，则

$\vec{X}=\vec{X_0}+(I\otimes I-A^-A\otimes(BB^-)^{T})\vec{U}-A^-CF_G\otimes(E_HDB^-)^{T}\vec{V}$，$\vec{Y}=\vec{Y_0}+(I\otimes I-G^-G\otimes(DD^-)^{T}-F_GC^-C\otimes(HH^-)^{T})\vec{V}$

再由引理 1，便得到（6）式和（7）式。证毕。

推论　设 $A\in R^{m\times k}$、$B\in R^{n\times l}$、$C\in R^{m\times n}$，则

$$AX+YB^{T}=C \tag{9}$$

有解 $X\in R^{k\times n}$、$Y\in R^{m\times l}$，当且仅当

$$E_ACF_{B^{T}}=0 \tag{10}$$

当（1）式相容时，其解一般形式为

$$X=A^-C+F_AW-A^-ZB^{T} \tag{11}$$

$$Y=E_ACB^{-T}+Z-E_AZB^{T}B^{-T} \tag{12}$$

其中 $W\in R^{k\times n}$、$Z\in R^{m\times l}$是任意的。

证明　由定理 1 直接可得。

文献［6］利用矩阵值空间理论讨论了矩阵方程组

$$AXB=E,\quad CXD=F \tag{13}$$

的求解问题，而用上述方法可直接给出（13）式有公共解的充要条件和公共解的广义逆表达式。

定理 2　设 $A\in R^{m\times n}$、$B\in R^{p\times q1}$、$C\in R^{m2\times n}$、$D\in R^{p\times q2}$、$E\in R^{m1\times q1}$、$F\in R^{m2\times q2}$，则（13）式有公共解的充要条件是

$$AA^-EB^-B=E \tag{14}$$

和

$$E_KCA^-EB^-DF_L+KK^-FD^-D+CC^-E_KFL^-L=F \tag{15}$$

其中：$K\equiv CF_A$、$L\equiv E_BD$，当（14）式、（15）式满足时，方程（13）有一个公共特解

$$X_0=A^-EB^--F_AK^-CA^-EB^-DD^--C^-E_KCA^-EB^-DL^-E_B+F_AK^-FD^-+C^-E_KFL^-E_B \tag{16}$$

此时，公共解一般形式是

$$X=X_0+W-A^-AWBB^-+F_AK^-CA^-AWBB^-DD^-+C^-E_KCA^-AWBB^-DL^-E_B-F_AK^-CWDD^--C^-E_KCWDL^-E_B \tag{17}$$

其中 W 是任意的。

证明 方程（13）等价于线性方程组

$$\begin{bmatrix} A\otimes B^{T} \\ C\otimes D^{T} \end{bmatrix}\vec{X}=\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{F} \end{bmatrix} \tag{18}$$

记

$$\overline{M}=\begin{bmatrix} A\otimes B^{T} \\ C\otimes D^{T} \end{bmatrix},$$

$$\overline{N_0}=F_AK^{-}\otimes D^{-T}+C^{-}E_K\otimes(L^{-}E_B)^{T}$$

则 $\overline{N}=[A^{-}\otimes B^{-T}-\overline{N_0}(C\otimes D^{T})(A^{-}\otimes B^{-T}),\ \overline{N_0}]$ 是 $\overline{M}$ 的 g⁻ 逆, 于是

$$\overline{M}\,\overline{N}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

其中: $M_{11}=AA^{-}\otimes(B^{-}B)^{T}$, $M_{12}=0$, $M_{21}=E_KCA^{-}\otimes(B^{-}DF_L)^{T}$, $M_{22}=KK^{-}\otimes(D^{-}D)^{T}+CC^{-}E_K\otimes(L^{-}L)^{T}$

又由引理 2, 方程(18)相容的充要条件是

$$\overline{M}\,\overline{N}\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{F} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{F} \end{bmatrix},$$

利用引理 1 即可得（14）式和（15）式。当（14）式和（15）式满足时，方程（18）有一个特解

$$\vec{X_0}=\overline{N}\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{F} \end{bmatrix}=(A^{-}\otimes B^{-T})\vec{E}-\overline{N_0}(C\otimes D^{T})(A^{-}\otimes B^{-T})\vec{E}+\overline{N_0}\,\vec{F},$$

由此得（16）式, 又由于

$$\overline{N}\,\overline{M}=A^{-}A\otimes(BB^{-})^{-T}-(F_AK^{-}\otimes D^{-T}+C^{-}E_K\otimes(L^{-}E_B)^{T})(C\otimes D^{T})(A^{-}A\otimes(BB^{-})^{T})+F_AK^{-}C\otimes(DD^{-})^{T}+C^{-}E_KC\otimes(DL^{-}E_B)^{T},$$

于是由引理 2 得方程(18)的一般解的形式

$$\vec{X}=\vec{X_0}+(I-\overline{N}\,\overline{M})\vec{W}$$

其中 $\vec{W}$ 是任意的 np 维向量, 再应用引理 1, 便得到（17）式。证毕。

参考文献:

[1] Baksalary J K, Kala K. The Matrix Equation $AX-YB=C$ [J]. Linear Algebra Appl, 1979, 25: 41—43.

[2] Baksalary J K, Kala R. The Matrix Equation $AXB+CYD=E$ [J]. Linear Algebra Appl, 1980, 30: 141—147.

[3] Xu Guiping, Wei Musheng, Zheng Daosheng. On Solutions of Matrix Equation $AXB+CYD=F$ [J]. Linear Algebra Appl, 1998, 279: 93—109.

[4] Ben—Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications [M]. New York: Wiley, 1974. 40—42.

[5] Campbell S L, Meyer C D. Generalized Inrerses of Linear Transformations [M]. London: Pitman, 1979. 46—65.

[6] Mitra S K. Common Solution to a Pair of Linear Matrix Equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$ [J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1973, 74: 213—216.

On Solutions of Matrix Equation $AXB+CYD=E$

LI Zhi—lin

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: The matrix equation $AXB+CYD=E$ often appears in the control theory, in the linear statistical inference and so on. In this paper, we make use of Kronecker products to view those matrix equations as the linear equations, and obtain its solutions in the form of generalized inverses of matrices.

Key words: kronecker product; generalized inverses of a matrix ; matrix equation