第 12 卷第 4 期
2000 年 12 月
江 苏 石 油 化 工 学 院 学 报
JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY
Vol. 12 No. 4
Dec. 2000

文章编号：1005－8893（2000）04－0059－03

量纲分析中的Π定理及其应用*

李　明
（淮海工学院 教务处，江苏 连云港 213016）

摘要：介绍了量纲分析中的一个重要定理——Π定理，并应用该定理半定量地分析了部分实际物理问题，揭示了Π定理在发现新的物理现象及规律中的作用。

关键词：量纲分析；Π定理；应用
中图分类号：O 59　　　文献标识码：A

人们探索自然的规律，首先诉之于观察和实验，由探索而建立起来的理论，又必须经得住实验或实践的检验。物理学是建筑在实验基础上的科学，而进行实验就必须度量某些物理量，并寻求它们之间的关系，物理规律的研究在相当程度上就是寻求有关物理量之间的函数关系。

对于一个复杂的物理过程，要通过严格的数学推理和演算来确定问题的精确解是困难且繁琐的，并且容易掩盖其物理实质，在这种情况下，首先应该考虑的基本方法是用量纲理论进行分析，由此提供寻求复杂规律的一些线索，找出物理规律的简单雏形，然后在此基础上进行实验研究。

要进行量纲分析，首先要了解一个重要定理——Π定理，本文介绍Π定理，并应用该定理于物理过程的半定量分析，阐述了其在物理新发现中的作用。

1　量纲分析的Π定理

设我们所选定的单位制中基本量的数目为 m，它们的量纲为 x_1，x_2，…，x_m，用 $[P]$ 代表导出量的量纲，则[1]：

$$[P]=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}$$

对上式取对数，则有：

$$\ln[P]=a_1\ln x_1+a_2\ln x_2+\cdots+a_m\ln x_m$$

若把 $\ln x_1$，$\ln x_2$，…，$\ln x_m$ 视为 m 维空间的“正交基矢”，则 a_1，a_2，…，a_m 就是矢量 $\ln[P]$ 在基矢上的投影。

由此可看出，物理量的量纲独立，即指无法用它们幂次的乘积组成无量纲量。用矢量的语言来说，即代表他们量纲的矢量彼此线性无关。在 m 空间里最多有 m 个彼此线性无关的矢量。m 个矢量（a_{1i}，a_{2i}，…，a_{mi}）（$i=1$，2，…，m）线性无关的条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\neq 0$$

这样，Π定理可以表述为：

设某物理问题中涉及 n 个物理量（包括物理常量）P_1，P_2，…，P_n，而我们所选的单位制中有 m 个基本量（$n>m$），则由此可组成 $n-m$ 个无量纲的量 Π_1，Π_2，…，Π_{n-m}，在物理量 P_1，P_2，…，P_n 之间存在的函数关系式：

$$f(P_1,P_2,\cdots,P_n)=0$$

可表达为相应的无量纲形式：

$$F(\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_{n-m})=0$$

或者从上式中把 Π_1 解出来：

* 收稿日期：2000－10－26
作者简介：李明（1958－），男，江苏赣榆人，副研究员，主要从事理论物理方面的研究。

$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \cdots, \Pi_{n-m})$

在一定的问题里物理系统的发展和演化往往由若干个变量决定，这种变量我们称之为主定参量。在进行量纲分析时，应系统分析研究对象，并选取其所依赖的全体主定参量，进而就主定参量的量纲，定性地提出主定参量间的关系。

如前所述，只有在预先选定了单位制以后，方谈得上量纲，故所选单位制中基本量的数目 m 视问题所涉及的研究对象而定，通常在力学问题中，选 MKS 制，故 $m=3$；在电学问题的 MKSA 制中，$m=4$。

2 Π 定理的应用

2.1 原子弹爆炸的能量问题

原子弹爆炸后，其火球的半径 R 依赖于大气的密度 ρ，爆炸后的时间 t 及原子弹释放的能量 E。据此，可推断原子弹释放能量的近似公式[2]：

在力学范围内研究，取 MKS 制，基本量 $x_1 = \mathrm{M}$，$x_2 = \mathrm{L}$，$x_3 = \mathrm{T}$，故 $m=3$

主定参量为 R，ρ，t，E

定理中 $n=4$，$n-m=1$

其量纲式分别为：

$$\begin{cases} \ln(R) = 0\times\ln\mathrm{M} + 1\times\ln\mathrm{L} + 0\times\ln\mathrm{T} \\ \ln(\rho) = 1\times\ln\mathrm{M} + (-3)\ln\mathrm{L} + 0\times\ln\mathrm{T} \\ \ln(t) = 0\times\ln\mathrm{M} + 0\times\ln\mathrm{L} + 1\times\ln\mathrm{T} \\ \ln(E) = 1\times\ln\mathrm{M} + 2\times\ln\mathrm{L} + (-2)\ln\mathrm{T} \end{cases}$$

其中最多有 3 个线性无关，另外一个可表为它们的线性组合，即：

$$\ln(E) = x_1\ln[R] + x_2\ln[\rho] + x_3\ln[t]$$

展开：$1\times\ln\mathrm{M} + 2\times\ln\mathrm{L} + (-2)\ln\mathrm{T} = x_1[0\times\ln\mathrm{M} + 1\times\ln\mathrm{L} + 0\times\ln\mathrm{T}] + x_2[1\times\ln\mathrm{M} + (-3)\ln\mathrm{L} + 0\times\ln\mathrm{T}] + x_3[0\times\ln\mathrm{M} + 0\times\ln\mathrm{L} + 1\times\ln\mathrm{T}]$

由于 lnM，lnL，lnT 被视为彼此独立的“正交基矢”，在上式中它们的系数应分别相等，即

$$\begin{cases} 0\times x_1 + 1\times x_2 + 0\times x_3 = 1 \\ 1\times x_1 + (-3)x_2 + 0\times x_3 = 2 \\ 0\times x_1 + 0\times x_2 + 1\times x_3 = -2 \end{cases}$$

这个联立方程的可解条件是它们的系数构成的行列式不为 0，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

由此解得：$x_1 = 5$，$x_2 = 1$，$x_3 = -2$，

$\ln(E) = 5\times\ln[R] + 1\times\ln[\rho] + (-2)\ln[t]$

或：$E = [R]^5[\rho]^1[t]^{-2}$

这样我们就找到了一个无量纲的物理量：

$\Pi_1 = R^{-5}\rho^{-1}t^2E$

由此可得到原子弹爆炸时释放能量的公式：

$E = \Pi_1 \cdot R^5\rho t^{-2}$

即 E 正比于 $R^5\rho t^{-2}$，此结论符合实验结果。

2.2 分析弹簧振子振动周期

在服从胡克定律的前提下，弹簧振子系统本身有两个参量，弹簧的倔强系数 k 和质量 m，若进一步考虑有可能偏离胡克定律的非谐项，则：

$f_{弹} = -k(x-x_0) \pm a(x-x_0)^2$

选取质量 m，倔强系数 k，周期 T，总能量 E，非谐项系数 a 为主要客观存在量，仍取基本量 $x_1 = \mathrm{M}$，$x_2 = \mathrm{L}$，$x_3 = \mathrm{T}$，即 $m=3$，主定参量为 k，a，m，T，E，其量纲式分别为：

$\ln(k) = 1\times\ln\mathrm{M} + 0\times\ln\mathrm{L} + (-2)\ln\mathrm{T}$

$\ln(a) = 1\times\ln\mathrm{M} + (-1)\ln\mathrm{L} + (-2)\ln\mathrm{T}$

$\ln(m) = 1\times\ln\mathrm{M} + 0\times\ln\mathrm{L} + 0\times\ln\mathrm{T}$

$\ln(T) = 0\times\ln\mathrm{M} + 0\times\ln\mathrm{L} + 1\times\ln\mathrm{T}$

$\ln(E) = 1\times\ln\mathrm{M} + 2\times\ln\mathrm{L} + (-2)\ln\mathrm{T}$

以上五式中最多有 3 个线性无关，另两个表示为它们的线性组合，或者简单地列成一个量纲表：

	k	a	m	T	E
M	1	1	1	0	1
L	0	−1	0	0	2
T	−2	−2	0	1	−2

由此量纲表再据 Π 定理即可得到以下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1 = T\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \Pi_2 = \frac{Ea^2}{k^3}$$

由Π定理可得：

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}}\,\Phi\left(\frac{Ea^2}{k^3}\right) = C\sqrt{\frac{m}{k}}\left[1 + C'\left(\frac{Ea^2}{k^3}\right) + \cdots\right]$$

可见，在简谐的情况下，$a=0$

$$T = c\sqrt{\frac{m}{k}}$$

在非谐情况下，周期数与能量（振幅）有关。

2.3 量纲分析有助于发现新的物理现象

由Π定理所推知，在物理过程中，可构成物理规律的必要条件是，在 n 个主定参量中，量纲无关的量的数目 m 必须满足 $m \leqslant n$。这一推论的物理意义在于：当我们从实验中证实了一个物理规律时，根据我们所知而得到的主定参量都与量纲无关时，那么，这一物理规律中必然存在代表新的物理现象的普适常数。

例如[3]，在黑体辐射中，辐射能量密度 U 与温度的四次方成正比，即 $U=\sigma T^4$。

在经典物理的范围内确定黑体辐射的主定参量有光速 c，玻耳兹曼常数 k，温度 T 和 U，这四个量的量纲分别为：

$[U] = [E\cdot L^{-3}]$，$[C] = [L\cdot T^{-1}]$，$T = [K]$，$[k] = [E\cdot K^{-1}]$

由此可以看出，四个量的量纲互相独立，即 $m=4$，$n=3$，由上述的四个量，在经典物理的范围内不可能得出一个物理规律，但实验表明 $U=\sigma T^4$，那么，肯定存在一个新的特征量。

由实验 $U=\sigma T^4$，再考虑主定参量 k 和 T 应同时以乘积的形式出现，则有：

$$U \propto \frac{(kT)^4}{c^3} \text{或} U = A\cdot\frac{(kT)^4}{c^3}$$

其中 A 为有量纲的比例常数：$[A] = [E^{-3}T^{-3}]$

为计算方便，令：$A=\frac{b}{\hbar^3}$，b 为一纯数

则 $U = b\cdot\frac{(KT)^4}{(\hbar c)^3}$

$$U = \frac{bk^4}{(\hbar c)^3}T^4$$

$$\sigma = \frac{bk^4}{(\hbar c)^3}$$

由此，可以发现一个表征新的物理现象——量子现象的普适常数 $[\hbar]$，$[\hbar] = [E\cdot T]$ 即为普朗克常数。所以，在分析与量子现象有关的物理过程中，则必须考虑 $\hbar$ 为其主定参量之一。可见，应用量纲分析，不仅可以使我们在许多复杂的物理过程中，避开严格的通常是繁琐的数学推理，较容量地得出物理量的半定量关系，而且也可以有助于新的科学发现。

参考文献：

[1] 赵凯华，罗蔚茵．新概念物理教程［M］．北京：高等教育出版社，1995. 59—63.

[2] 钱伯初．量子软科学基本原理和计算方法［M］．兰州：甘肃人民出版社，1986. 10—15.

[3] 赵凯华．定性与半定量物理学［M］．北京：高等教育出版社，1991. 60—65.

The Π Theorem and Its Application to Dimensional Analysis

LI Ming

(Educational Administration Office，Huaihai Institute of Technology，Lianyungang 222005，China)

Abstract：An importment theorem of dimensional analysis ——Π theorem is introduced．With it some actual physical questions are analysed in semi—quantification，and the functions of that Π theorem are explained in discovering new physical phenomenon and laws．

Key words：dimensional；Π theorem；application