文章编号：1005－8893（2001）01－0048－03

三阶有重根 Poincaré 差分方程解的渐近性质*

吴春青
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：研究了三阶 Poincaré 差分方程解的渐近性质。这种差分方程对应的常系数线性差分方程的特征方程有重根。

关键词：Poincaré 差分方程；渐近性质；不动点定理
中图分类号：O 241.3 文献标识码：A

一般形式的 Poincaré 差分方程为：

$$y(n+m)+(a_1+p_1(m))y(n+m-1)+\cdots+(a_n+p_n(m))y(m)=0 \quad (1)$$

这里 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，$p_i(m)(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数列，$m\in N\cup\{0\}$。方程(1)可看作如下常系数线性差分方程

$$y(n+m)+a_1y(n+m-1)+\cdots+a_ny(m)=0 \quad (2)$$

的扰动，方程(2)的特征方程为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad (3)$$

当特征方程(3)有两两互异特征根时，许多作者[1~3]研究了方程(1)的解的渐近性质。但对于方程(3)有重根时，这方面的研究很少，原因在于利用常数变易法[4]求(1)的一个解时，较难得到一般的表达式。本文就三阶情形来讨论当方程(3)有重根时，方程(1)有解渐近于方程(2)的解的条件。

我们研究方程

$$y(m+3)+(a_1+p_1(m))y(m+2)+(a_2+p_2(m))y(m+1)+(a_3+p_3(m))y(m)=0 \quad (4)$$

这里 $a_1=-2a-b$，$a_2=a^2+2ab$，$a_3=-a^2b$，a，b 为常数，这时方程(4)对应的常系数差分方程的特征方程为 $(\lambda-b)(\lambda-a)^2=0$。即有单根 $\lambda=b$ 及重根 $\lambda=a$。方程(4)对应的常系数差分方程 $x(m+3)+a_1x(m+2)+a_2x(m+1)+a_3x(m)=0$ 的解为：

$$x(m)=c_1b^m+c_2a^m+c_3ma^m \quad (5)$$

这里 c_1，c_2，c_3 为任意常数。为讨论方便，在本文中假设 $b<a$。

1 主要结论

定理。假设 $\sum_{m=1}^{\infty}p_i(m)m$ 收敛，$i=1,2,3$。$\alpha(m)$ 是单调不增的正数数列，且

$$\lim_{m\to\infty}\alpha(m)=0,\ \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha(m+1)}{\alpha(m)}=1 \quad (6)$$

$$\sum_{j=m}^{\infty}p_i(j)j=O(\alpha(m)),\ i=1,2,3 \quad (7)$$

则方程(4)有解满足

$$y(m)=ma^m(1+O(\alpha(m))) \quad (8)$$

这里和下文中 O，o 是 $m\to\infty$ 时的 Laudau 记号。

证明：为方便，我们记方程(4)为：

$$y(m+3)+a_1y(m+2)+a_2y(m+1)+a_3y(m)=-Ly(m) \quad (9)$$

这里 $Ly(m)=p_1(m)y(m+2)+p_2(m)y(m+1)+p_3(m)y(m)$。利用常数变易法，我们假设(9)有形如

$$y(m)=u_1(m)b^m+u_2(m)a^m+u_3(m)ma^m \quad (10)$$

的解，这里 $u_1(m)$，$u_2(m)$，$u_3(m)$ 满足

* 收稿日期：2000－10－08
作者简介：吴春青（1972－），男，安徽歙县人，硕士，主要从事差分方程方面的研究。

$$\begin{cases}\Delta u_1(m)b^{m+1}+\Delta u_2(m)a^{m+1}+\\ \qquad\Delta u_3(m)(m+1)a^{m+1}=0\\ \Delta u_1(m)b^{m+2}+\Delta u_2(m)a^{m+2}+\\ \qquad\Delta u_3(m)(m+2)a^{m+2}=0\\ \Delta u_1(m)b^{m+3}+\Delta u_2(m)a^{m+3}+\\ \qquad\Delta u_3(m)(m+3)a^{m+3}=-Ly(m)\end{cases}\tag{11}$$

上式中, $\Delta u_i(m)$为前向差分, 即$\Delta u_i(m)=u_i(m+1)-u_i(m)$, $i=1,2,3$。求解(11)得到

$$\begin{cases}\Delta u_1(m)=\dfrac{1}{b(a-b)^2}b^{-m}Ly(m)\\ \Delta u_2(m)=\dfrac{1}{a^2(a-b)}(m+1)a^{-m}Ly(m)+\\ \qquad\dfrac{1}{a(a-b)^2}a^{-m}Ly(m)\\ \Delta u_3(m)=-\dfrac{1}{a^2(a-b)}a^{-m}Ly(m)\end{cases}\tag{12}$$

从(10)式,(12)式, 若 $y(m)$为方程(9)的解, 则 $y(m)$满足

$$y(m)=ma^m-\frac{1}{b(a-b)^2}\sum_{j=M}^{m-1}b^{m-j}Ly(j)+\frac{1}{a^2(a-b)}\sum_{j=M}^{m-1}a^{m-j}Ly(j)+\frac{1}{a(a-b)^2}\sum_{j=M}^{m-1}a^{m-j}Ly(j)+\frac{1}{a^2(a-b)}\sum_{j=m}^{\infty}ma^{m-j}Ly(j)\tag{13}$$

上式中 M 将在后文确定。

我们再记

$$v(m)=(1/m)a^{-m}y(m)-1\tag{14}$$

即是 $y(m)-ma^{-m}=a^m mv(m)$。于是若 $v(m)=O(\alpha(m))$, 则(8)式成立。从(14)式及 $Ly(m)$的定义有:

$$Ly(m)=[p_1(m)a^{m+2}(m+2)+p_2(m)a^{m+1}(m+1)+p_3(m)a^m m]+[p_1(m)a^{m+2}(m+2)v(m+2)+p_2(m)a^{m+1}(m+1)v(m+1)+p_3(m)a^m mv(m)]\tag{15}$$

将(14)式,(15)式代入(13)式, 经过一些计算有:

$$\begin{aligned}v(m)=&-\frac{1}{b(a-b)^2}\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}\frac{b^{m-j}}{a^m}[p_1(j)d^{j+2}(j+2)+p_2(j)d^{j+1}(j+1)+p_3(j)a^j j]+\frac{1}{a^2(a-b)}\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}(j+1)[p_1(j)a^2(j+2)+p_2(j)a(j+1)+p_3(j)j]\\&+\frac{1}{a(a-b)^2}\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}[p_1(j)a^2(j+2)+p_2(j)a(j+1)+p_3(j)d^j j]+\frac{1}{a^2(a-b)}\sum_{j=m}^{\infty}[p_1(j)a^2(j+2)+p_2(j)a(j+1)+p_3(j)a^j j]-\frac{1}{b(a-b)^2}\sum_{j=M}^{m-1}\frac{b^{m-j}}{a^m}\\&[p_1(j)a^{j+2}(j+2)v(j+2)+p_2(j)a^{j+1}(j+1)v(j+1)+p_3(j)a^j jv(j)]+\frac{1}{a^2(a-b)}\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}a^{-j}(j+1)\\&[p_1(j)a^{j+2}(j+2)v(j+2)+p_2(j)a^{j+1}(j+1)v(j+1)+p_3(j)a^j jv(j)]+\frac{1}{a(a-b)^2}\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}a^{-j}[p_1(j)a^{j+2}(j+2)v(j+2)+p_2(j)a^{j+1}(j+1)v(j+1)+\\&p_3(j)d^j jv(j)]+\frac{1}{a^2(a-b)}\sum_{j=m}^{\infty}a^{-j}[p_1(j)a^{j+2}(j+2)v(j+2)+p_2(j)d^{j+1}(j+1)v(j+1)+p_3(j)a^j jv(j)]=S(m)+Hv(m)\end{aligned}\tag{16}$$

记 $S_1(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}\dfrac{b^{m-j}}{a^{m-j}}p_1(j)(j+2)$, $S_2(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}(j+1)(j+2)p_1(j)$, $S_3(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}p_1(j)(j+2)$, $S_4(m)=\sum_{j=m}^{\infty}p_1(j)(j+2)$

$H_1v(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}\dfrac{b^{m-j}}{a^{m-j}}p_1(j)(j+2)v(j+2)$, $H_2v(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}(j+1)(j+2)p_1(j)v(j+2)$, $H_3v(m)=\dfrac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}p_1(j)(j+2)v(j+2)$, $H_4v(m)=\sum_{j=m}^{\infty}p_1(j)(j+2)v(j+2)$

(16)式右端定义了关于 $v(m)$的映射, 下面定义一个 Banach 空间 B, 证明这个映射在 B 内有不动点, 即(16)式有解 $v(m)$在 B 内。对所有满足 $u(m)=O(\alpha(m))$的序列 $u(m)$, 定义范数

$$\|u(m)\|=\mathrm{Sup}_{m\geqslant M}\frac{|u(m)|}{\alpha(m)}\tag{17}$$

M 将在后文给出。可验证对这个范数, 定义了一个 Banach 空间 B, 且 $u(m)\in B$ 的充要条件是 $u(m)=O(\alpha(m))$。下面证明按(16)式定义的映射 T: $(Tv)(m)=S(m)+Hv(m)$是映上的, 且为压缩映射。第一步证明若 $v(m)\in B$, 则$(Tv)(m)\in B$。先证明 $S(m)\in B$。由于类似性, 只要证 $S_i(m)\in B(i=1,2,3,4)$即可。对 $S_1(m)$, 采用分部求和公式, 记 $W(m)=\sum_{j=m}^{\infty}p_1(j)(j+2)$, 则:

$$S(m)=-\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}\frac{b^{m-j}}{a^{m-j}}\Delta W(j)=-\frac{1}{m}W(m)+\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-M}+\frac{1}{m}\sum_{j=M}^{m-1}W(j+1)\left(\frac{b}{a}\right)^{m-j-1}\left(\frac{a-b}{a}\right)$$

由于 $b<a$, $m>M$, 再注意到(7)式,(6)的第二式, 及$\alpha(m)$的单调不增性, 有 $S_1(m)=O(\alpha(m))$, 只要 M 充分大。类似利用分部求和公式, 可证明 S_2

$(m)=O(\alpha(m))$，注意到(7)式及(6)的第二式，有 $S_3(m)=O(\alpha(m))$，$S_4(m)=O(\alpha(m))$，只要 M 充分大。这样一来利用 $S(m)$其余式子的类似性，有 $S(m)\in B$。再假设 $v(m)\in B$，与上述方法类似，同样可证 $H_iv(m)=O(\alpha(m))$，$i=1,2,3,4$，从而有 $Hv(m)\in B$。于是$(Tv)(m)\in B$。即映射 T 是映上的。

第二步证明 T 为压缩映射。设 $u_1(m)$，$u_2(m)\in B$，从第一步证明有：$\|Tu_1-Tu_2\|=O(\alpha(m))\|u_1-u_2\|$，注意到(6)式第一式，可见对 $0<\eta<1$，可取 M 充分大，使 $\|Tu_1-Tu_2\|<\eta\|u_1-u_2\|$。从而 T 为在 B 内的压缩映射。根据压缩映象原理有 $v(m)\in B$ 使(16)式成立。由 $v(m)=O(\alpha(m))$，再注意到(14)式，知定理成立。

2 注 记

(1)利用上述方法，将(13)式稍作变动，也可讨论方程(4)有解 $y(m)$渐趋于其对应常系数方程的解 b^m 及 a^m 的条件，即渐近形式 $y(m)=b^m(1+O(\beta(m)))$及 $y(m)=a^m(1+O(\gamma(m)))$的情形。这里 $\beta(m)$，$\gamma(m)$的性质与定理中 $\alpha(m)$的性质类似。

(2)对三阶 Poincaré 差分方程有三重根的情况，也可得到相应的渐近形式和渐近条件。

参考文献：

[1] Coffman C V. Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Difference Equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1964, 10: 22－51.

[2] Li Zhaohua. The Asymptotic Estimates of Solutions of Ordinary Difference Equations[J]. J Math Anal Appl, 1983, 94: 181－192.

[3] Trench W F. Asymptotic Behavior of Solutions of Poincaré Difference Equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 119: 431－438.

[4] 王联, 王慕秋. 常差分方程[M]. 新疆: 新疆大学出版社, 1991. 107－118.

Asymptotic Behavior of Solutions to Third Order Poincaré Difference Equations with Multiple Roots

WU Chun－qing

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou, 213016, China)

Abstract: We studied the asymptotic behavior of solutions to third order Poincaré difference equation whose characteristic equation has multiple roots.

Key words: Poincaré difference equation; asymptotic behavior; fixed point theorem