第 13 卷第 2 期　　江 苏 石 油 化 工 学 院 学 报　　Vol. 13 No. 2
2001 年 6 月　　JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY　　Jun. 2001

文章编号：1005－8893（2001）02－0049－03

一个求多项式零点的并行迭代法*

黄清龙

（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：讨论一个同时决定多项式零点的并行迭代法。证明它收敛，收敛阶至少是 5。

关键词：迭代法；多项式；零点；收敛性

中图分类号：O 241　　　文献标识码：A

1　迭代公式

设 n 次多项式

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)\quad r_i\neq r_j\ (i\neq j)$$

记

$$\alpha_j^{(k)}=\frac{p\left(x_j^{(k)}\right)}{p'\left(x_j^{(k)}\right)},\quad \beta_j^{(k)}=\frac{p''\left(x_j^{(k)}\right)}{p'\left(x_j^{(k)}\right)},$$

$$u_j^{(k)}=x_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

并记

$$\gamma_i^{(k)}=\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}}\right]^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{(x_i^{(k)}-u_j^{(k)})^2},\quad i=1,2,\cdots,n$$

本文讨论的迭代公式为

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\frac{\alpha_i^{(k)}}{1-\frac{1}{2}\alpha_i^{(k)}\beta_i^{(k)}-\frac{1}{2}\alpha_i^{(k)^2}\gamma_i^{(k)}},$$

$$i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}$ 是多项式 $p(x)$ 的 n 个单零点的初始近似。

多项式的零点也就是代数方程的根，高次代数方程的求根问题有很多实际应用背景。讨论代数方程的求解方法也有不少文献，如文献 [1～5]，其迭代解法的基本问题之一是构造新的迭代式并希望提高收敛速度或收敛阶。本文的迭代式（2）作为求多项式单零点的并行算法，是一个只用到 2 阶导数的 5 阶格式。

3 阶收敛的 Halley 迭代是一个很好的数值方法[6]，其迭代式为 $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\dfrac{\alpha_i^{(k)}}{1-\frac{1}{2}\alpha_i^{(k)}\beta_i^{(k)}}$，对比一下迭代式（2）与 Halley 迭代公式知，（2）式是 Halley 迭代的某种修正。（1）式用的是 Newton 迭代函数，所以在迭代式（2）的构造中应用了迭代函数复合的思想。迭代式（2）的收敛性和收敛阶的讨论，我们采用类似于文献 [1，4] 的证明思想和文献 [4] 中的不等式估计方法。

2　收敛性的证明

记

$$A_i^{(k)}=\frac{B_i^{(k)}}{2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-r_j}},\quad h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-r_i,$$

$$B_i^{(k)}=(x_i^{(k)}-r_i)\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j-u_j^{(k)}}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-u_j^{(k)})}\left(\frac{1}{x_i^{(k)}-r_j}+\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}}\right)+\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{1}{x_i^{(k)}-r_j}+\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}}\right)\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j-u_j^{(k)}}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-u_j^{(k)})}\right]$$

---

* 收稿日期：2000－11－10

基金项目：江苏石油化工学院科技发展基金资助项目

作者简介：黄清龙（1963－），重庆市忠县人，硕士，副教授，研究工作主要在应用数学和计算数学等方面。

则迭代式（2）可改写成

$$h_i^{(k+1)}=\frac{A_i^{(k)}}{1+A_i^{(k)}}h_i^{(k)} \tag{3}$$

引理 1 存在与 j 无关的常数 $\delta>0$，$c>0$，使当 $|x-r_j|\leqslant\delta$ 时，$|N(x)-r_j|\leqslant|x-r_j|^2$，其中 $N(x)$ 为 Newton 迭代函数 $x-p(x)/p'(x)$，$p(x)$ 为 n 次多项式，r_j 是 $p(x)$ 的单零点，$j=1, 2, \cdots, n$。

证明：因为 Newton 迭代是 2 阶收敛的，故对 r_j，存在 $\delta_j>0$，$c_j>0$，当 $|x-r_j|\leqslant\delta_j$ 时，$|N(x)-r_j|\leqslant c_j|x-r_j|^2$，取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，$c=\max\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 则知引理 1 成立。

记

$$d=\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{|r_i-r_j|\} \tag{4}$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是多项式 $p(x)$ 的根。

显然下述引理 2 成立。

引理 2 存在正数 s，使得：$s>n$，$s\delta\geqslant d$，$s\geqslant cd$，$\lambda\equiv\frac{(2s-3)n(n-1)}{(s-1)(s-2)^2(s-n)}<1$

其中 c，δ 为引理 1 中确定的常数。

定理 1 当迭代初值 $x_j^{(0)}$ 满足 $|h_j^{(0)}|=|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant d/s$ 时，迭代式（2）产生的序列收敛于 r_i。

证明：下面用数学归纳法证明本定理。

（1）假设迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）都满足 $|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant d/s$。因为

$$x_i^{(0)}-r_i\geqslant|r_j-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant\frac{s-1}{s}d \tag{5}$$

所以 $\left|1+(x_i^{(0)}-r_i)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(0)}-r_j}\right|\geqslant$

$1-|x_i^{(0)}-r_i|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{|x_i^{(0)}-r_j|}\geqslant\frac{s-n}{s-1}>0$，

注意到 $A_i^{(0)}=\dfrac{\frac{1}{2}B_i^{(0)}(x_i^{(0)}-r_i)}{1+(x_i^{(0)}-r_i)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(0)}-r_j}}$，

从而

$$|A_i^{(0)}|\leqslant\frac{s-1}{2(s-n)}|B_i^{(0)}|\cdot|h_i^{(0)}| \tag{6}$$

根据引理 1，引理 2 知

$$|u_j^{(0)}-r_j|\leqslant c|h_j^{(0)}|^2\leqslant c\left(\frac{d}{s}\right)^2\leqslant\frac{d}{s} \tag{7}$$

又 $|u_j^{(0)}-r_i|\geqslant|r_i-r_j|-|u_j^{(0)}-r_j|\geqslant\frac{s-1}{s}d$，

所以

$$|x_i^{(0)}-u_j^{(0)}|\geqslant|u_j^{(0)}-r_i|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant\frac{s-2}{s}d \tag{8}$$

记

$$h^{(k)}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|h_j^{(k)}|\}\ (k=0, 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

利用（5）、（7）、（8）、（9）式可估计出

$$|B_i^{(0)}|\leqslant\frac{c(n-1)n(2s-3)s^3}{(s-1)^2(s-2)^2d^3}h^{(0)^3} \tag{10}$$

将此式代入（6）式并利用引理 2 得

$$|A_i^{(0)}|\leqslant\frac{c\lambda s^3}{2d^3}h^{(0)^4}\leqslant\frac{c\lambda d}{2s}<\frac{1}{2} \tag{11}$$

记

$$q=\frac{\frac{c\lambda d}{2s}}{1-\frac{c\lambda d}{2s}} \tag{12}$$

注意到 $0<q<1$，所以由（3）式：

$$|h_i^{(1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(0)}|}{1-|A_i^{(0)}|}|h_i^{(0)}|\leqslant q|h_i^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}\leqslant\delta$$

故 $|u_i^{(1)}-r_i|\leqslant c|h_j^{(1)}|^2\leqslant\frac{cd}{s}|h_j^{(1)}|\leqslant|h_j^{(1)}|\leqslant\frac{d}{s}$

综上所述，当迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$ 时，$x_i^{(1)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）都满足 $|x_i^{(1)}-r_i|\leqslant\frac{d}{s}$，$u_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）也满足 $|u_i^{(1)}-r_i|\leqslant\frac{d}{s}$，并且有 $|h_i^{(1)}|\leqslant q|h_i^{(0)}|$，（$i=1, 2, \cdots, n$），$0<q<1$ 由（12）式确定。

（2）现假设 $x_j^{(k)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_j^{(k)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$ 则同前面类似地估计可得 $|A_i^{(k)}|<\frac{1}{2}$，$|x_i^{(k+1)}-r_i|\leqslant\frac{d}{s}$，$|h_i^{(k+1)}|\leqslant q|h_i^{(k)}|$。

其中常数 q 仍由（12）式确定。

因此由数学归纳法知对一切整数 $k\geqslant0$ 有 $|h_i^{(k+1)}|\leqslant q^k|h_i^{(k)}|$

从而 $|h_i^{(k)}|\leqslant q^k|h_i^{(0)}|\leqslant q^k\frac{d}{s}$

令 $k\to\infty$，则 $h_i^{(k)}\to0$，即 $x_i^{(k)}\to r_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）

3 收敛阶的讨论

定理 2 当初值 $x_j^{(0)}$ 满足 $|h_j^{(0)}|=|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1, 2, \cdots, n$）时迭代式（2）至少是 5 阶收敛的。

证明：在前面收敛性的证明中已得到，当 $|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1, 2, \cdots, n$）时，对任何整数 $k\geqslant0$，有

$|h_j^{(k+1)}|\leqslant q|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$，$j=1, 2, \cdots, n$。所以就像从$|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$出发得到$A_i^{(0)}$的估计式（11）一样，我们可以从$|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$出发类似地估计$A_i^{(k)}$得

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\frac{c\lambda s^3}{2d^3}h^{(k)^4}$$

注意到$h^{(k)}\leqslant\frac{d}{s}$，所以$|A_i^{(k)}|\leqslant\frac{\lambda cd}{2s}<\frac{1}{2}$，

$$|h_i^{(k+1)}|=\left|\frac{A_i^{(k)}}{1+A_i^{(k)}}h_i^{(k)}\right|\leqslant\frac{|A_i^{(k)}|}{1-|A_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|\leqslant 2|A_i^{(k)}|\cdot|h_i^{(k)}|\leqslant\frac{c\lambda s^3}{d^3}h^{(k)^5}$$

由此知迭代式（2）至少是5阶收敛的。证毕。

4 数值例子

我们将本文构造的迭代式（2）用于求解地震波理论中的Rayleigh方程$32x^3-56x^2+24x-3=0$，编程用True BASIC语言，迭代初值分别取$x_1^{(0)}=0$，$x_2^{(0)}=0.5$，$x_3^{(0)}=1$，精度要求$\varepsilon=10^{-12}$，要使3个根都满足精度要求，共需迭代4步，具体计算结果见下表。

表1 求解的计算结果

迭代次数 k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0.5	1.0
1	0.237 805 374 970	0.320 436 223 759	1.182 325 056 039
2	0.249 735 495 167	0.316 994 602 475	1.183 012 700 679
3	0.249 999 995 611	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892
4	0.250 000 000 000	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892

最后我们指出，若将$\gamma_i^{(k)}$的表达式中$u_j^{(k)}$换成$x_j^{(k)}$，得

$$\gamma_i^{*(k)}=\left[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}\right]^2+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})^2}$$

这时可得迭代式

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\frac{\alpha_i^{(k)}}{1-\frac{1}{2}\alpha_i^{(k)}\beta_i^{(k)}-\frac{1}{2}\alpha_i^{(k)^2}\gamma_i^{*(k)}},\quad i=1, 2, \cdots, n \qquad (2)^*$$

可以证明（2）*式是4阶收敛的。但$\alpha_j^{(k)}$总是需要计算的，因此用（1）式对$x_j^{(k)}$先做一次修正即计算出$u_j^{(k)}$，几乎不增加计算的情况下（2）式比（2）*式高一阶收敛。

参考文献：

[1] Ehrlich L W. A Modified Newton Method for Polynomials [J]. Comm ACM, 1967, 10: 107—108.

[2] Nourein A W. An Improvement on Two Iteration Methods tor Simultaneous Determination of Zeros of a Polynomial [J]. Int Comput Math, 1977, 3: 241—252.

[3] Dochev K, Byrnev P. Certain Modified for the Approximate Solution of Algebraic Eguations [J]. Comput Method and Math Phys, 1964, 4: 915—920.

[4] 黄清龙．两个求解多项式方程的迭代法 [J]．兰州大学学报（自然科学版），1994，30（2）：10—14.

[5] 黄清龙．解代数方程时牛顿法的一种改进 [J]．应用数学 1995，8（增）：73—76.

[6] 李宗义．计算机数值应用方法 [M]．第六版．台北：台湾复文书局，1983. 26—29.

A Parallel Iterative Method for Zeros of a Polynomial

HUANG Qing—long

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: This paper discusses a parallel iterative method for simultaneous determination of Zeros of a Polynomial. It is proved that this method is convergent, and its order is at least 5.

Key words: iterative method; polynomial; zeros; convergence