

文章编号: 1005-8893 (2001) 03-0017-03

# 一类四维 Lotka-Volterra 系统的持久性<sup>\*</sup>

沃松林, 刘玉清

(江苏石油化工学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 在生态学中, 常常需要研究一个生态系统随时间增加时, 它的每一个种群是否持续。讨论了一个四维的具有捕食性质的 Lotka-Volterra 系统 (2) 的持久性。给出了系统 (2) 解的一致有界性, 正平衡点全局渐近稳定, 系统 (2) 持久的充分必要条件。

关键词: 一致有界; 全局渐近稳定; 持久性

中图分类号: O 175.12

文献标识码: A

在生态学研究, 常常希望了解一个生态系统, 随着时间的延长是否可以长期生存而不会导致任何一种群的灭绝, 并不一定要求种群平衡在某一平衡位置上, 也就是说: 希望解决一个生态数学模型:

$$x' = xf(t, x) \quad (1)$$

是否它的所有轨线的  $\omega$ -极限集是一个不与任何坐标面相交的集合, 这样就引入了持久性的概念<sup>[1-5]</sup>。

设  $R_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, 2, \dots, n\}$ ,  $\text{int}R_+^n$  为集合  $R_+^n$  的内部,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $R_+^n$  内任意一点,  $f(t, x)$  在  $I \times R_+^n$  上连续且满足解的存在唯一性条件,  $x_0 \in R_+^n$ , 系统 (1) 以  $x_0$  为初值的饱和解为  $x = \varphi(t, x)$  的最大存在区间  $t \in [0, T_\varphi]$ , 若系统 (1) 的解最终一致有界, 则  $T_\varphi = +\infty$ 。

定义 1: 对任意的  $x_0 \in \text{int}R_+^n$ , 存在正数  $\delta$  和  $\delta'$  ( $\delta, \delta'$  与  $x_0$  无关) 使:

$$\delta \leq \varphi_i(t, x_0) \leq \delta'$$

当  $t \geq t_0$  时成立, 这里  $t_0$  与  $x_0$  有关, 则称系统 (1) 是持久的。

定义 2: 若存在  $x_0 \in \text{int}R_+^n$  和  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\tau \in (t_0, T_\varphi)$  使:

$$\limsup_{t \rightarrow \tau} \varphi_i(t, x_0) = 0$$

则称系统 (1) 是绝灭的。

对于三维树状 Lotka-Volterra 系统, 其持久的充分必要条件是系统的正平衡点  $X^*$  存在<sup>[1]</sup>, 而对于四维的 Lotka-Volterra 系统结果较少。

本文重点讨论四维的 Lotka-Volterra 捕食系统:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 [a_{10} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3] \\ x'_2 = x_2 [a_{20} + a_{21}x_1 - a_{22}x_2] \\ x'_3 = x_3 [a_{30} + a_{31}x_1 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4] \\ x'_4 = x_4 [-a_{40} + a_{43}x_3] \end{cases} \quad (2)$$

的持久性。其中:  $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。  $a_{ij} > 0$  为常数,  $a_{10}, a_{20}, a_{30}$  分别表示种群  $x_1, x_2, x_3$  的增长率,  $a_{40}$  表示种群  $x_4$  的死亡率,  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  分别表示种群  $x_1, x_2, x_3$  的密度制约率,  $a_{ij} (i \neq j)$  表示种群  $x_i$  与种群  $x_j$  之间为捕食与被捕食关系系数。由生态意义, 以下讨论仅在  $R_+^4$  内进行。

$$\text{记: } \lambda = a_{10} - a_{12} \frac{a_{20}}{a_{22}} - a_{13} \frac{a_{40}}{a_{43}},$$

$$\eta = a_{30} + a_{31} \frac{\lambda}{\Delta} a_{22} - a_{33} \frac{a_{40}}{a_{43}}, \quad \Delta = a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}$$

\* 收稿日期: 2001-05-28

作者简介: 沃松林 (1964-), 男, 江苏丹阳人, 副教授, 主要从事生物数学和生物控制方面的研究。

## 1 主要定理及证明

定理 1: 系统 (2) 的一切正初值的解最终一致有界。

证明: 设  $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  为系统 (2) 的以  $X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$  为初值的解。其中:  $x_{i0} > 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。

$$\text{令: } S(t) = \sum_{i=1}^4 c_i x_i(t)$$

其中:  $c_1 = 1, c_2 = \frac{a_{12}}{a_{21}}, c_3 = \frac{a_{13}}{a_{31}}, c_4 = \frac{a_{34}a_{13}}{a_{43}a_{31}}$

$$\left. \frac{dS(t)}{dt} \right|_{(2)} + a_{40} S(t) =$$

$$c_1 x_1 [a_{10} - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3] + c_2 x_2 [a_{20} + a_{21} x_1 - a_{22} x_2] + c_3 x_3 [a_{30} + a_{31} x_1 - a_{33} x_3 - a_{34} x_4] + c_4 x_4 [-a_{40} + a_{43} x_3] + a_{40} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4) = (a_{10} + a_{40}) x_1 - a_{11} x_1^2 + c_2 (a_{20} + a_{40}) x_2 - c_2 a_{22} x_2^2 + c_3 (a_{30} + a_{40}) x_3 - c_3 a_{33} x_3^2 \leq M$$

其中:  $M =$

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{(a_{10} + a_{40})^2}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} c_2 (a_{20} + a_{40})^2 + \frac{1}{a_{33}} c_3 (a_{30} + a_{40})^2 \right] > 0$$

$$\text{所以: } S(t) \leq \frac{M}{a_{40}} + \left[ S(0) - \frac{M}{a_{40}} \right] e^{-a_{40}t}$$

从而系统 (2) 的一切正初值的解最终一致有界。

引理: 系统 (2) 在  $R^+$  内有正平衡点  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  的充要条件为:

$$\lambda > 0, \eta > 0$$

定理 2: 如果系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  存在, 则  $X^*$  全局渐近稳定。

证明: 把系统 (2) 化为对称形式:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 [-a_{11} (x_1 - x_1^*) - a_{12} (x_2 - x_2^*) - a_{13} (x_3 - x_3^*)] \\ x_2' = x_2 [a_{21} (x_1 - x_1^*) - a_{22} (x_2 - x_2^*)] \\ x_3' = x_3 [a_{31} (x_1 - x_1^*) - a_{33} (x_3 - x_3^*) - a_{34} (x_4 - x_4^*)] \\ x_4' = x_4 [a_{43} (x_3 - x_3^*)] \end{cases}$$

考虑函数

$$W(x) = \sum_{i=1}^4 k_i (x_i - x_i^* \ln x_i)$$

$k_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$  满足:

$$\begin{cases} k_2 a_{21} - k_1 a_{12} = 0 \\ k_3 a_{31} - k_1 a_{13} = 0 \\ k_4 a_{43} - k_3 a_{34} = 0 \end{cases}$$

$$\text{例: } k_1 = 1, k_2 = \frac{a_{12}}{a_{21}}, k_3 = \frac{a_{13}}{a_{31}}, k_4 = \frac{a_{34}a_{13}}{a_{43}a_{31}}$$

$$\text{令: } V(X) = W(X) - W(X^*)$$

则:  $V(X)$  是正定的。

$$\text{因为: } \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)'} = \sum_{i=1}^4 k_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i} x_i' = -k_1 a_{11} (x_1 - x_1^*)^2 - k_2 a_{22} (x_2 - x_2^*)^2 - k_3 a_{33} (x_3 - x_3^*)^2 \leq 0$$

由系统 (2)' 可知集合

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, x_3 = x_3^*, x_4 > 0 \}$$

除正平衡点  $X^*$  外不含系统 (2)' 的整条半轨线。所以由 Lasalle 定理知:  $X^*$  是全局渐近稳定的。

定理 3: 如果系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  不存在, 则系统 (2) 是绝灭的。

证明: 由引理知道系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  不存在  $\Leftrightarrow \lambda \leq 0$  或者  $\eta \leq 0$ 。

设  $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  为系统 (2) 的以  $X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$  初值的解。(其中:  $x_{i0} > 0, i = 1, 2, 3, 4$ )

### 1.1 $\lambda \leq 0$

$$\text{因为: } \frac{x_1'}{x_1} - \frac{a_{12}x_2'}{a_{22}x_2} + \frac{a_{13}x_4'}{a_{43}x_4} =$$

$$\lambda - \left( a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}} \right) x_1$$

$$\text{所以: } \frac{x_1}{x_{10}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\frac{a_{13}}{a_{43}}} = \left( \frac{x_2}{x_{20}} \right)^{\frac{a_{12}}{a_{22}}} e^{\lambda t} e^{-\int_0^t \frac{\Delta}{a_{22}} x_1 dt}$$

$$(1) \lambda < 0, \text{ 则 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_1}{x_{10}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\frac{a_{13}}{a_{43}}} = 0$$

$$(2) \lambda = 0, \text{ 则 } \lim_{t \rightarrow \infty} x_1 = 0 \text{ 或者}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_1}{x_{10}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\frac{a_{13}}{a_{43}}} = 0$$

从而  $\lambda \leq 0$  时, 系统 (2) 是绝灭的。

### 1.2 $\eta \leq 0$

$$\text{因为: } \frac{a_{31}}{\Delta} a_{22} \frac{x_1'}{x_1} - \frac{a_{31}}{\Delta} a_{12} \frac{x_2'}{x_2} + \frac{x_3'}{x_3} +$$

$$\left( \frac{a_{31}a_{13}}{\Delta} a_{22} + a_{33} \right) \frac{1}{a_{43}} \frac{x_4'}{x_4} = \eta - a_{34} x_4$$

$$\text{所以: } \left( \frac{x_1}{x_{10}} \right)^{\frac{a_{31}a_{22}}{\Delta}} \frac{x_3}{x_{30}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\left( \frac{a_{13}a_{31}a_{22}}{\Delta} + a_{33} \right) \frac{1}{a_{43}}} =$$

$$\left( \frac{x_2}{x_{20}} \right)^{\frac{a_{31}a_{12}}{\Delta}} e^{\eta t} e^{-\int_0^t a_{34} x_4 dt}$$

(1)  $\eta < 0$  时, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{x_1}{x_{10}} \right)^{\frac{a_{31}a_{22}}{\Delta}} \frac{x_3}{x_{30}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\left( \frac{a_{13}a_{31}a_{22}}{\Delta} + a_{33} \right) \frac{1}{a_{43}}} = 0$$

(2)  $\eta = 0$  时, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_4 = 0$

$$\text{或者} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{x_1}{x_{10}} \right)^{\frac{a_{31}a_{22}}{\Delta}} \frac{x_3}{x_{30}} \left( \frac{x_4}{x_{40}} \right)^{\left( \frac{a_{13}a_{31}a_{22}}{\Delta} + a_{33} \right) \frac{1}{a_{43}}} = 0$$

从而  $\eta \leq 0$  时, 系统 (2) 是绝灭的。

故: 系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  不存在, 则系统 (2) 是绝灭的。

由定理 2 及定理 3 知:

定理 4: 系统 (2) 持久的充分必要条件是系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  存在。

## 2 结 论

由以上的分析可以看出: 种群  $x_1, x_2, x_3,$

$x_4$  的密度一定有限; 当系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  不存在时, 种群  $x_1, x_2, x_3, x_4$  中至少有一种群会绝灭; 当系统 (2) 的正平衡点  $X^*$  存在时, 种群  $x_1, x_2, x_3, x_4$  中任何一种群都不会绝灭, 并且不论它们的初值在  $\text{int } R_+^4$  中取何值, 在经过充分长的时间后, 它们的密度都分别稳定在一组定值附近。

## 参考文献:

- [1] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1988. 297—337.
- [2] Thomas C Gard, Thomas G Hallam. Persistence in Food Webs—I: Lotka—Volterra Food Chains [J]. Bull Math Biology, 1979 (41): 887—891.
- [3] Kirlinger G. Persistence in Lotka—Volterra Equation; Linked Prey—predator Systems [J]. Math Biosci, 1986, 81: 1—27.
- [4] Roy A B, Solimano F. Global Stability and Oscillations in Classical Lotka—Volterra Loop [J]. J Math Biol, 1987, 24: 23—31.
- [5] V Huston Sheffield. A Lotka—Volterra Theorem on Average Liapunov Functions [J]. Mh Math, 1984 (98): 267—275.

## Permanence in Four Species Lotka—Volterra System

WO Song—lin, LIU Yu—qing

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** In bioecology, we usually study an ecosystem in which whether every species is persistent as  $t \rightarrow \infty$ . In this paper, we discuss the permanence in a four species prey—predator Lotka—Volterra system (2). We obtain: the solutions of the system (2) which start in  $\text{int } R_+^4$  are eventually uniformly bounded; positive equilibrium point  $M^*$  is globally stable and system (2) is permanent if positive equilibrium point  $M^*$  exists.

**Key words:** eventually uniformly bounded; globally stable; permanence