文章编号：1005－8893（2001）04－0045－05

多项式方程组符号求解的主项解耦消元法*

杨廷力[1]，杭鲁滨[2]，沈惠平[3]，刘安心[4]
（1. 中国石化金陵石油化工公司 科学技术委员会，江苏 南京 210037；2. 东南大学；3. 江苏石油化工学院；4. 解放军工程兵工程学院）

摘要：提出多项式组符号求解的主项解耦消元法：视多项式为变元不同幂乘积的线性组合，以主项解耦三角型多项式组为引导，用逐项伪除法求余式，将原多项式组化为与其同解的主项解耦三角型多项式组。该法综合了 Grobner 基法、吴氏消元法和线性变换消元法等方法的长处，适用于求解一般多项式组，且计算效率较高；又易用于研究多项式组解的类型及其存在条件。文中给出两例，其一较详细地讨论了 3 个二元二次完全多项式组解的类型及其存在条件。

关键词：多项式方程组；消元法；三角形多项式方程组；主项解耦
中图分类号：O 122.2；O 241.7 文献标识码：A

文献 [1] 指出：数学、物理和工程技术中“很多重要的困难问题要化为非线性代数方程组（即多项式方程组）的求解问题，包括数值求解、符号求解和数值—符号混合求解问题。而符号求解对理论分析、公式推导和定理证明有特别的重要性”。符号求解方法有 Grobner 基法[2～4]、吴文俊消元法[1,4,5]、聚筛法[6]、组合结式法[7]和准线性变换法[8]等。其中，“Grobner 基法和吴氏消元法都是系统而完全的优秀方法”，前者被选为欧共体 POSSO（多项式方程组求解）项目的核心算法，后者为我国数学机械化研究领域的核心算法。尽管如此，“仍有许多困难的问题不能用它们解决”。一般情况下，Grobner 基法计算效率较低；吴法“对于准三角型的多项式方程组十分有效，但对于对称性较强的多项式方程组，里特——吴整序算法效果较差；……非线性代数方程组的求解是极其复杂的困难问题，很可能需要综合多种方法的长处，才能得到满意的解决方案”[1]。

本文提出多项式组符号求解的主项解耦消元法。其基本思想：多项式视为变元不同幂乘积的线性组合，以主项解耦三角型方程组为引导，用伪除法求余，将原方程组化为与其同解的主项解耦三角型方程组。文中给出两例，较详细地讨论了 3 个二元二次完全多项式组解的类型及其存在条件。该例“用吴法在 Pentium Ⅱ 266 上用 Maple Ⅴ Release 4 编制的程序运行解不出未知数，再用 Grobner 基法求解，运行 2 小时后仍无结果”[7]。

1 理论基础

1.1 基本概念

一般多元多项式方程组为

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

多项式可视为多变元不同幂乘积的线性组合，即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j x_1^{\varepsilon_{j1}} x_2^{\varepsilon_{j2}} \cdots x_n^{\varepsilon_{jn}} \tag{2}$$

式中，ε_{ji}（$i = 1, 2, \cdots, n$）为非负整数，为 x_i 在第 j 项中的幂指数；a_j 是第 j 项幂乘积的

* 收稿日期：2001－11－07
基金项目：国家自然科学基金资助项目（59875084）
作者简介：杨廷力（1940－），男，河南南阳人，教授，主要从事机构学及机器人机构学方面的研究。

系数。

定义 1　多项式中变元的排序为 $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_2 > x_1$，意指 x_n 为“最重要”变元排在第 1 位，以此类推，x_1 为“最不重要”变元排在最后一位。

定义 2　多项式的项按字典法排序。

若项所对应的幂乘积 x_1^{i1}、$x_2^{i2}\cdots x_n^{in}$ 排在 x_1^{j1}、$x_2^{j2}\cdots x_n^{jn}$ 的后面，即若 x_1^{j1}、$x_2^{j2}\cdots x_n^{jn} > x_1^{i1}$、$x_2^{i2}\cdots x_n^{in}$，则对任意 k（$\leqslant n$）有 $in=jn$，…，$ik=jk$，$ik-1<jk-1$成立。

定义 3　多项式的主变元：即在该多项式中实际出现的，按字典法排序的相对“最重要”的变元。

定义 4　多项式的主幂乘积：多项式中按字典法排序的相对“最重要”的幂乘积。

定义 5　多项式的主项：即相应于主幂乘积的项。

定义 6　多项式的主系数：即多项式的主项中，主变元幂的系数。

定义 7　三角型多项式方程组 TS 为

$$\text{TS}: f_i(x_1, x_2, \cdots, x_i)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

定义 8　主项解耦三角型方程组 DTS

$$\text{DTS}: \begin{cases} f_1(x_1)=0 \\ a_i x_i^{\varepsilon_i} + f_i(x_1, \cdots, x_i)=0 \\ i=2, 3, \cdots, n \end{cases} \tag{4}$$

式中，ε_i（$i=2, \cdots, n$）为非负整数；$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ 中 x_i 的幂次总小于 ε_i；a_i 为常量。式（4）表明：DTS 中各多项式的主系数皆为不含变元的常量。

1.2　两多项式组的求余

1.2.1　多项式 P_i 对 P_j 的余式

用 P_j 只消去 P_i 主项得到的余式为 P_i 对 P_j 的一级中间余式，记作 $r(P_i/P_j^{(1)})=r_{i1}$；用 P_j 只消去 r_{i1} 主项得到的余式为 P_i 对 P_j 的二级中间余式，记作 $r(P_i/P_j^{(2)})=r_{i2}$；依此类推，用 P_j 只消去 r_{is} 主项得到的余式为 P_i 对 P_j 的 s 级中间余式，记作 $r(P_i/P_j^{(s)})=r_{is}$。

设 M_i，M_j 分别为多项式 P_i 与 P_j 的主幂乘积，M_{ij} 为 M_i 与 M_j 的最小公倍数。P_i 对 P_j 的求余消元的类型有：

①当 $M_i > M_j$（按字典序，M_i 比 M_j“重要”）且 $M_{ij}=M_i$ 时，P_i 对 P_j 用伪除法求余，直到余式 r_{is} 的主幂乘积 M_{rs} 小于 P_j 的主幂乘积 M_j，即 $M_{rs}<M_j$，则 $R(P_i/P_j)=r_{is}=r(P_i/P_j^{(s)})$。

②当 $M_i > M_j$ 且 $M_i < M_{ij} < M_i \circ M_j$ 时，设 P_i 对 P_j 的一阶中间余式为 r_{i1}：

（ⅰ）若 r_{i1} 的主幂乘积 M_{r1} 为 M_j 与 M_{r1} 的最小公倍数，即 $M_{r1}=M_{rij}$，则按第①类消元，r_{i1} 继续对 P_j 求余。

（ⅱ）若 $M_{r1} \neq M_{r1j}$，则取 $R(P_i/P_j)=r_{i1}=R(P_i/P_j^{(1)})$。

③当 $M_i > M_j$ 且 $M_{ij}=M_i \circ M_j$ 时，$R(P_i/P_j)=P_i$。

④当 $M_i < M_j$ 时，$R(P_i/P_j)=P_i$。

⑤若多项式组有 l（$\geqslant 2$）个多项式主幂乘积相同，则对其线性变换为阶梯形，即变强对称为弱对称多项式组。

易知，P_i 对 P_j 的余式公式为

$$I_j^s P_i = Q_j P_j + R_i \tag{5}$$

式中，s 为非负整数，表明 R_i 为 P_i 对 P_j 的 s 级余式；Q_j 为商多项式；I_j 为 P_j 的主系数。

1.2.2　多项式 P_i 对多项式组 PS 的余式

给定多项式 P_i 及多项组 $\text{PS}=\{P_1, P_1, \cdots, P_k\}$，依次连续计算 P_i 对 PS 中每一多项式 P_j（$j=1, 2, \cdots, k$）的余式，即 $R(P_i/P_k)=r_k$，$R(r_k/P_{(k-1)})=r_{k-1}$，…，$R(r_2/P_1)=r_1$，则 P_i 对 PS 的余式为

$$R(P_i/\text{PS})=R_i=r_1 \tag{6}$$

考虑到式（5），P_i 对 PS 的余式公式为

$$I_1^{s1}、I_2^{s2}\cdots I_k^{sk} P_i = \sum_{j=1}^{k} Q_j P_j + R_i \tag{7}$$

式中，s_1（s_2，…，s_k）为非负整数，Q_j 为商多项式；I_1，I_3，$\cdots I_k$ 分别为 P_j（$j=1 \sim k$）的主系数。

1.2.3　多项式组 PS 对三角型方程组 TS 的余式

给定多项式组 $\text{PS}=\{P_1, P_2, \cdots P_r\}$ 及三角型方程组 $\text{TS}=\{T_1, T_2, \cdots T_k\}$，PS 对 TS 的余是一多项式组 $\text{RS}=\{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$，记作

$$R(\text{PS}/\text{TS})=\text{RS}=\{R_1, R_2, \cdots R_i, \cdots R_r\} \tag{8}$$

式中，R_i 是式（6）所示的 P_i 对 TS 的余式。

2　多项式组的消元过程

多项式组 PS 的消元过程就是通过有限步求余

消元，将PS转化为一个与其同解的主项解耦三角型方程组DTS的过程。其主要步骤有：

Step 1　将PS赋予多项式集合 $G_1=\{PS\}$，并对 G_1 进行线性变换，使 G_1 中不存在主幂乘积相同的多项式，记为

$G_1=\{P_1, P_2, \cdots, P_r\}$

Step 2　自集合 G_1 中选取主项解耦三角型方程组 DTS_1。

自多项式集合 G 选取DTS的基本原则：

①从 x_i（$i=1, 2, \cdots n$）为主元的所有多项式中，取主项的 x_i 幂次最低且主项解耦的多项式 T_i（$i=1, 2, \cdots n$）纳入DTS。

②若不存在满足原则①的 T_i（$i=2\sim n$），则在主元为 x_i（$i=2\sim n$）的所有多项式中暂取主幂积相对“最不重要”者纳入 DTS^*（DTS^* 不满足式（4）定义）。满足该原则的 DTS^* 就是三角化方程组TS（式3）。

③对主元为 x_i 的所有多项式，按特性（如 x_i 的幂次，或含共同变元的数目与类型等）分区。当同一区内有多个多项式时，暂取其中主幂乘积相对“最不重要”者纳入 DTS^*。

④当DTS中一多项式可分解为若干个因式相乘时，DTS亦应分解为相应的若干个子DTS分别进行消元运算。

Step 3　求 G_1 对 DTS_1 的余式集合 RS_1 及主项解耦的中间余式集合 r_{s1}。

约定：设 $DTS^*=\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$，其中 T_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的主元为 x_i 且按字母序 $T_i>T_{i-1}$ 顺序排列。当 G 中主元为 x_i 的多项式 $g_j\neq T_i$ 时，g_j 对 DTS^* 的求余为依次对 $T_i, T_{i-1}, \cdots, T_2, T_1$ 求余；当 $g_j=T_i$ 时，g_i 对 DTS^* 的求余为依次对 $T_{i-1}, T_{i-2}, \cdots, T_2, T_1, T_i$ 求余。

该约定使不满足式（4）的 DTS^* 有 $R(\overline{GS}/DTS^*)\neq\Phi$。

G_1 对 DTS_1 的余式集合RS，分两种情况讨论：

Case 1　$RS_1=\Phi$（空集）

若 $DTS_1^*=DTS$，原方程组PS已通过消元化为方程组 DTS_1。

Case 2　$RS_1\neq\Phi$

若 RS_1 中有非零常量余式，则PS无解；

若 RS_1 中无非零常量余式，将 RS_1 及 r_{s1} 纳入多项式集合 G_2，即

$G_2=\{PS, RS_1, r_{s1}\}$ 及其子集合 $\overline{G_2}=\{PS, RS_1\}$。

G_2 中多项式应进行线性变换，使其不存在主幂乘积相同的多项式。

Step 4　对集合 G_2 再进行Step 1～Step 3运算：从 G_2 中选取 DTS_2；求 $\overline{G_2}$ 对 DTS_2 的余式集合 RS_2 及主项解耦中间余式集合 r_{s2}。

若 $RS_2=\Phi$ 且 $DTS_2^*=DTS_2$，则PS已通过消元化为方程组 DTS_2。

若 $RS_2\neq\Phi$，当 RS_2 中含有非零常量余式时，PS无解；当 RS_2 中无非零常量余式时，将 RS_2 和 r_{s2} 纳入多项式集合 G_3，即

$G_3=\{PS, RS, RS_2, r_{s1}, r_{s2}\}$ 及其子集合

$\overline{G_3}=\{PS, RS_1, RS_2\}$

G_3 中多项式应进行线性变换，使其不存在主幂乘积相同的多项式。

对 G_3 再重复上述各步。若 PS 有解，如此重复下去，对某一正整数 m，总存在 DTS_m 且 $RS_m=\Phi$，即已通过求余消元，将PS化为一个主项解耦三角型方程组DTS。

3　多项式组零点集结构公式

由式（5）可知PS的零点必是DTS的零点。又由于PS对DTS的余式集合RS为空集且DTS各多项式的主系数为非零常量，由式（7）可知DTS的零点必为PS的零点。故有

$$\mathrm{Zero}(PS)=\mathrm{Zero}(DTS) \qquad (9)$$

式（9）表明：当DTS的各主项系数为非零时，原多项式组PS与主项解耦三角型多项式组DTS同解。式（9）为主项解耦消元法的多项式零点集结构公式。

4　举　例

例1

PS：

$$\begin{cases}-x_2^2+x_1x_2+1=0 & (f_1)\\ -2x_3+x_1^2=0 & (f_2)\\ -x_3^2+x_1x_2-1=0 & (f_3)\end{cases}$$

解：

（0）PS中变元排序：$x_3>x_2>x_1$

(1.1) $G_1=\{f_1, f_2, f_3\}$ 及 $\overline{G}_1=\{f_1, f_2, f_3\}$

(1.2) 自 G_1 选取 $DTS_1=\{f_1, f_2\}$

(1.3) $\overline{G}_1$ 对 DTS_1 的余式集合

RS_1:

$$\begin{cases} R(f_1/DTS_1)=0;\ R(f_2/DTS_1)=0; \\ R(f_3/DTS_1)=x_1x_2-\dfrac{1}{4}x_1^4-1=0 \end{cases} \qquad (f_4)$$

r_{s1}:

$r_{s1}=\Phi$

(2.1) $G_2=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 及 $\overline{G}_2=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

(2.2) 自 G_2 选取 $DTS_2^*=\{f_4, f_2\}$

(2.3) $\overline{G}_2$ 对 DTS_2^* 的余式集合

RS_2:

$$\begin{cases} R(f_1/DTS_2^*)= \\ \quad -x_1^8+4x_1^6-8x_1^4+32x_1^2-16 \qquad (f_5) \\ R(f_2/DTS_2^*)=0;\quad R(f_3/DTS_2^*)=0; \\ R(f_4/DTS_2^*)=0 \end{cases}$$

r_{s2}:

$$r(f_1/f_4^{(3)})=-16x_2-x_1^7+4x_1^5-4x_1^3+32x_1=0 \qquad (f_{5.1})$$

(3.1) $G_3=\{f_1, f_2, f_3;\ f_4, f_5;\ f_{5.1}\}$

及 $\overline{G}_3=\{f_1, f_2, f_3;\ f_4, f_5\}$

(3.2) 自 G_3 选取 $DTS_3=\{f_5, f_{5.1}, f_2\}$

(3.3) $\overline{G}_3$ 对 DTS_3 的余式集合 $RS_3=\Phi$

(4) DTS_3:

$$\begin{cases} -x_1^8+4x_1^6-8x_1^4+32x_1^2-16=0 & (f_5) \\ -16x_2-x_1^7+4x_1^5-4x_1^3+32x_1=0 & (f_{5.1}) \\ -2x_3+x_1^2=0 & (f_2) \end{cases}$$

PS 与 DTS_3 同解，即只有 8 组解。

例 2:

PS^0:

$$\begin{cases} a_1^0y^2+a_2^0xy+a_3^0y+a_4^0x^2+a_5^0x+a_6^0=0 & (f_1^0) \\ b_1^0y^2+b_2^0xy+b_3^0y+b_4^0x^2+b_5^0x+b_6^0=0 & (f_2^0) \\ c_1^0y^2+c_2^0xy+c_3^0y+c_4^0x^2+c_5^0x+c_6^0=0 & (f_3^0) \end{cases}$$

解:

(0) PS 中变元排序 $z>y>x$

(1.1) $G_1=\{f_1^0, f_2^0, f_3^0\}$

对 G_1 进行线性变换，得到

PS:

$$\begin{cases} y^2+0+0+a_4x^2+a_5x+a_6=0 & (f_1) \\ 0+xy+0+b_4x^2+b_5x+b_6=0 & (f_2) \\ 0+0+y+c_4x^2+c_5x+c_6=0 & (f_3) \end{cases}$$

故 $G_1=\{f_1, f_2, f_3\}$ 及 $\overline{G}_1=\{f_1, f_2, f_3\}$

(1.2) 自 G_1 选取 $DTS_1=\{f_3\}$

(1.3) $\overline{G}_1$ 对 DTS_1 的余式集合

RS_1:

$$\begin{cases} R(f_1/DTS_1)=A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+ \\ \quad A_5=0 \qquad (f_4) \\ \text{式中，} A_1=c_4^2,\ A_2=2c_4c_5,\ A_3=a_4+2c_4c_6+c_5^2, \\ \quad A_4=a_5+2c_5c_6,\quad A_5=a_6+c_6^2 \\ R(f_2/DTS_1)=-c_4x^3+ \\ \quad (b_4-c_5)x^2+(b_5-c_6)x+b_6=0 \qquad (f_5) \\ R(f_3/DTS_1)=0 \end{cases}$$

r_{s1}:

$$r(f_1/f_3^{(3)})=-c_6y+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+(a_5+c_5c_6)x+a_6=0 \qquad (f_{4.1})$$

(1.4) 解的类型及其存在条件

若 PS 的各项系数使 f_4 与 f_5 的各项系数恒为零，则 $R(PS/DTS_1)=\Phi$，表明 PS 与 $DTS_1=\{f_3\}$ 同解，且为无穷解。式 f_4 与 f_5 各项系数恒等于零为其解的存在条件。

若 $RS_1\neq\Phi$ 且 DTS_1 中不存在只有常数项的余式，则将余式 f_4、f_5 纳入 G_2 (f_{4-1} 与 f_3 结构相同，故删去)。

(2.1) $G_2=\{f_1, f_2, f_3;\ f_4, f_5\}$ 及 $\overline{G}_2=\{f_1, f_2, f_3;\ f_4, f_5\}$

(2.2) 自 G_2 选取 $DTS_2=\{f_5, f_3\}$

(2.3) $\overline{G}_2$ 对 DTS_2 的余式集合

RS_2:

$$\begin{cases} R(f_1/DTS_2)=B_1x^2+B_2x+B_3 \qquad (f_6) \\ \text{式中，} B_1=c_4(a_4+b_4^2+b_5c_4+c_4c_6), \\ \quad B_2=c_4(a_5+b_4b_5+b_5c_5+c_5c_6), \\ \quad B_3=-b_6c_4(b_4+c_5) \\ R(f_2/DTS_2)=0; \\ R(f_3/DTS_2)=0; \\ R(f_4/DTS_2)=f_6; \\ R(f_5/DTS_2)=0 \end{cases}$$

r_{s2}:

$r_{s2}=\Phi$

(2.4) 解的类型及其存在条件

若 PS 各项系数使 f_6 各项系数恒为零，则 R (PS/DTS_2) $=\Phi$，表明 PS 与 $DTS_2=\{f_5, f_3\}$ 为同解方程组。即 PS 有 3 组解，式 f_6 各项系数恒等于零为其解的存在条件。

若 $RS_2\neq\Phi$ 且不存在只有常数项的余式，则将 f_6 纳入 G_3。

重复以上步骤，可以得到 PS 分别有 2 组解、1 组解及无解的存在条件，这里不再赘述之。

5 结 论

由主项解耦消元法的基本原理与消元过程可知，该方法综合了 Grobner 基法、吴氏消元法、线性变换消元法等方法的长处，故适用于求解一般多项式组且计算效率较高，又易用于研究解的类型及其存在条件。效率较高的原因是：以 DTS 为引导的有序消元和较简单的运算终止判据（相对于 Grobner 基法）；多项式组 PS 与 DTS 的同解性且不涉及多项式组的约化问题（相对于吴法）以及用线性变换使强对称性多项式组转化为弱对称。

本文方法可能为构造 Grobner 基提供一种新算法，且主项解耦三角化方程组对多项式理论有重要意义；亦为解决几何定理机器证明的非退化充分必要条件及多项式组的约化问题提供了一种新途径。

参考文献：

[1] 吴文俊. 王者之路——机器证明及其应用 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1999.

[2] Buchberger B. Applications of Grobner Bases in Nonlinear Computational Geometry [M]. New York: LNCS Springer Verlag, 1987.

[3] Buchberger B. In Recent Trends in Multidimensional System Theory [C]. New York: LNCS Springer Verlag, 1985. 184—232.

[4] Bhubaneswar M. Algorithmic Algebra, Springer—Verlag [M]. 北京：科学出版社，2001.

[5] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）[M]. 北京：科学出版社，1984.

[6] 杨路，张景中，侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明 [M]. 上海：上海科技出版社，1996.

[7] 周加农. 多项式方程组的组合结式方法初探 [J]. 四川大学学报（自然科学版），1999，36（2）：18—21.

[8] 杭鲁滨，金琼，杨廷力. 基于线性变换的一般 5R 串联机器人逆运动学分析 [J]. 机械工程学报，2001，37（5）：22—25.

An Elimination Method With Decoupling of Leading Terms For Polynomial Set

YANG Ting—Li[1], HANG Lu—bing[2], SHEN Hui—ping[3], LIU An—xin[4]

(1. SINOPIC Jinling Petrochemical Corp., Nanjing 210037, China)

Abstract: This paper presents an elimination method with decoupling of leading terms for polynomial set. A polynomial is considered to be a linear combination of power products of variables. Using the term by term Euclidean Algorithm for polynomials, an original polynomial set PS could be translated into an ascending polynomial set DTS with decoupling of leading terms and both are equivalent equation sets.

This method synthesises the strong points of Grobner basis elimination, Wu elimination and linear elimination and so it is suitable for solving efficiently general polynomial set. And it can be used for determining types and existing conditions of solutions of a polynomial set.

Key words: polynomial set; elimination method; ascending polynomial set; decoupling of leading terms