第 13 卷第 4 期　　江苏石油化工学院学报　　Vol. 13 No. 4
2001 年 12 月　　JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY　　Dec. 2001

文章编号：1005－8893（2001）04－0056－02

一个非定常自由边界问题解的存在、唯一性*

刘玉清，沃松林
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：推广了单晶拉制中的一个非定常自由边界问题，考虑了解的存在唯一性。

关键词：自由边界；存在性；唯一性
中图分类号：O 175.8　　文献标识码：A

文献 [1] 讨论了单晶拉制中存在的如下自由边界问题，得到了其解的存在唯一性：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-cu \tag{1}$$

$$u(x,0)=1 \qquad 0\leqslant x\leqslant s(0) \tag{2}$$

$$u(0,t)=1 \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{3}$$

$$\frac{\partial u[s(t),t]}{\partial x}+\alpha u[s(t),t]=0 \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{4}$$

$$a(u)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\theta_1 u[s(t),t]-\theta_2\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{5}$$

$$s(0)=s_0 \tag{6}$$

其中 c，α，θ_1，θ_2，s_0 均为正常数，讨论区域为 $Q=\{(x,t)\mid 0<x<s(t),0\leqslant t\leqslant T\}$（任给 $0<T<+\infty$）。

本文考虑（4）式的更一般化情况，即以：

$$\frac{\partial u[s(t),t]}{\partial x}+f[u(s(t),t)]=0 \tag{7}$$

代替（4）式，其中

$$f(z)\in C^1[0,T],\ f(0)=0,\ \alpha\geqslant f'(z)>0 \tag{8}$$

更进一步，以一般性的初值条件代替（2）式：

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{9}$$

满足

$$\varphi(x)\in C^{2+\gamma}[0,s_0] \qquad (\gamma\in(0,1)) \qquad 0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1 \tag{10}$$

及相容性条件

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(s_0)+f(\varphi(s_0))=0 \tag{11}$$

首先，建立在自由边界满足一定条件的情况下解的存在唯一性结论。

定理 1：若 $s(t)\in C^1[0,T]$ 且 $0\leqslant\dot{s}(t)\leqslant M$，则问题（1）式（9）式（3）式（6）式（7）式存在唯一解 $u(x,t)C^{2,1}(Q)$ 且有估计：$|u|_{C^{2,1}(\overline{Q})}\leqslant C|\varphi|_{C^{2+\gamma}[0,s_0]}$，$C$ 依赖于 $|\dot{s}|_0$。

证明：设 $B=\{u(s(t),t)\in C^{\gamma/2}[0,T]\mid u(s_0,0)=\varphi(s_0)\}$，任取 $\nu(s(t),t)\in B$，定义映射 $T\nu=u$，其中 u 是把（7）式 $f(u(s(t),t))$ 换为 $f(\nu(s(t),t))$ 后得到的解，作变换 $y=s(t)-x$，但仍把变量记为 x，t 则原问题变为：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}-cu & 0\leqslant x\leqslant s(t),\ 0<t\leqslant T \\ u(x,0)=\varphi(s_0-x) & 0\leqslant x\leqslant s_0 \\ u(s(t),t)=1 & 0<t\leqslant T \\ u_x(0,t)=-f(\nu(0,t)) & 0<t\leqslant T \end{cases} \tag{12}$$

由文献 [2] 知存在唯一解

$$u\in C^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(\overline{Q}),\quad |u|_{C^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}}\leqslant C(|\varphi|_{C^{2+\gamma}}+|f(\nu(0,t))|_{C^{\gamma/2}}) \tag{13}$$

所以，$T:B\rightarrow B$。为证 T 是连续映射，设 ν_1，$\nu_2\in B$，相应的解记为 u_1，u_2，令 $w=u_1-u_2$，则

* 收稿日期：2001－05－28
作者简介：刘玉清（1966－），男，江苏常州人，硕士，讲师，主要从事偏微分方程自由边界问题方面的研究。

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

w 满足：

$$\begin{cases} w_t + \dot{s} w_x = w_{xx} - cw \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \\ w_x(s(t), t) = f(\nu_2(s(t), t)) - \\ \qquad f(\nu_1(s(t), t)) \end{cases}$$

通过作变换，一样由（13）式的估计知 T 是连续映射。由 $C^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}$ 在 $C^{\gamma,\gamma/2}$ 中紧嵌入知 T 是紧映射。对任给 $\sigma \in [0, 1]$，问题：

$$\begin{cases} u_t + \dot{s} u_x = u_{xx} - cu \\ u(x, 0) = \sigma\varphi(x) \\ u(0, t) = \sigma \\ u_x(s(t), t) + \sigma f(u(s(t), t)) = 0 \end{cases}$$

同样有关于 σ 的一致估计，由不动点定理，T 存在不动点，即原问题有解 $u(x, t) \in C^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(\overline{Q})$。

下面给出解的进一步估计。

首先，把 $u \in C^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}$ 代入原问题，由鞋带技术知 $u \in C^{2,1}(\overline{Q}) \cap C^{\infty}(Q)$，然后由文献[1] 中定理 1 知 $0 \leqslant u \leqslant 1$，$|u_x| \leqslant M_1$（$M_1$ 依赖于 $|\dot{s}|_0$，$|\varphi|_0$）。通过 u_{xx} 的估计，可以由方程得到 u_t 的估计，为此要给出 u_{xx} 在 $x = s(t)$ 上的估计。构造闸函数 $\Psi(x, t) = u_x(x, t) + \int_0^{u(x,t)} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{e}^{\lambda x}$（$\lambda$ 待定），则 $\Psi(x, t)$ 应满足如下定解问题：

$$\begin{cases} \Psi_t + \dot{s}\Psi_x - \Psi_{xx} = -cu_x - \\ \qquad cuf(u) - f'(u)u_x^2 + \lambda(\lambda - \dot{s})\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \Psi(0, t) = u_x(0, t) + \int_0^1 f(z)\mathrm{d}z - 1 \\ \Psi(x, 0) = \varphi'(x) + \int_0^{\varphi(x)} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{e}^{\lambda x} \\ \Psi(s(t), t) = \\ -f(u(s(t), t)) + \int_0^{u(s(t),t)} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{e}^{\lambda s(t)} \end{cases}$$

由于 $\Psi_x(x, 0) = \varphi''(x) + f(\varphi(x))\varphi'(x) - \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$，所以取 λ 足够大可使 $\Psi(x, t)$ 在 $x = s(t)$ 上处处取到最小值，于是 $\Psi_x|_{x=s(t)} \leqslant 0$，此即 $[u_{xx} + f(u)u_x - \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}]|_{x=s(t)} \leqslant 0$，同理，令：$\overline{\Psi}(x, t) = u_x(x, t) - \int_0^{u(x,t)} f(z)\mathrm{d}z + \mathrm{e}^{\lambda x}$，可得到 $[u_{xx} - f(u)u_x + \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}]|_{x=s(t)} \geqslant 0$，于是得到 $u_{xx}(s(t), t)$ 的估计，从而再利用方程可得到 $|u_t| \leqslant M_2$，M_2 依赖于 $|\dot{s}|_0$，$|\varphi|_1$。

解的唯一性由极值原理可证。

定理 2：自由边界问题（1）式（9）式（3）式（7）式（5）式（6）式的解存在且唯一。

证明：也是取 Banach 空间中闭凸集：

$Y = \{s(t) \in C^1[0, T] \mid s(0) = s_0,\ \dot{s}(0) = \theta_1\varphi(s_0) - \theta_2\varphi'(0),\ 0 \leqslant \dot{s}(t) \leqslant \theta_1 + hk\theta_2\}$

然后令 $b(t) = s_0 + \theta_1 \int_0^t u(s(\tau), \tau)\mathrm{d}\tau - \theta_2 \int_0^t \dfrac{\partial u(0, \tau)}{\partial x} d\tau = Fs(t)$，则 $\dot{b}(t) = \theta_1 u(s(t), t) - \theta_2 \dfrac{\partial u(0, t)}{\partial x} \in C^1$，显然，和文献[1] 中证法一样可得 $F: Y \to Y$ 及 F 是紧映射以及解的存在唯一性。

参考文献：

[1] 汤国桢．一个非定常自由边界问题解的存在唯一性[J]．浙江大学学报（自然科学版），1999，33（3）：243—246.

[2] Ladyzhenskaja O A，Solonnikov V A，Ural′ceva N N. Linear and Qusi—linear Equations of Parabolictype [M]. Rhode Island: American Mathematical Society Providence，1968.

The Existence and Uniqueness of Solutions on a Nonstationary Free Boundary Problem

LIU Yu—qing，WO Song—lin

（Department of Information Science，Jiangsu Institute of Petrochemical Technology，Changzhou 213016，China）

Abstract：We discuss a nonstationary free boundary problem in crystal growh，the existence and uniqueness is proved.

Key words：free boundary；existence；uniqueness

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net