第 14 卷第 1 期　　江 苏 石 油 化 工 学 院 学 报　　Vol. 14 No. 1
2002 年 3 月　　JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY　　Mar. 2002

文章编号：1005－8893（2002）01－0048－03

一个自由边界带源及动力学条件的 Stefan 问题解的收敛性*

刘玉清
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：讨论自由边界条件为$-\partial_x u_\varepsilon(x, t)=\lambda+\varepsilon h'_\varepsilon(t)$的 Stefan 问题，通过其自由边界的单调性证明了解在一定的条件下的收敛性。

关键词：自由边界；单调性；收敛性
中图分类号：O 175.8　　　文献标识码：A

考虑如下自由边界上有源并带动力学条件的 Stefan 问题：

$$\begin{cases}\partial_t u_\varepsilon=\partial_{xx}u_\varepsilon & 0<x<h_\varepsilon(t),\ t>0\\ \partial_x u_\varepsilon(0, t)=g(t) & t>0\\ u_\varepsilon(h_\varepsilon(t), t)=0 & t>0\\ -\partial_x u_\varepsilon(x, t)=\lambda+\varepsilon h'_\varepsilon(t) & \\ & x=h_\varepsilon(t),\ t>0\\ u_\varepsilon(x, 0)=u_{0\varepsilon}(x) & 0\leqslant x\leqslant h_\varepsilon(0)\\ h_\varepsilon(0)=b_\varepsilon & \end{cases} \tag{1}$$

其中u_ε表示温度，λ是正常数，代表源强度，参数$\varepsilon>0$是与潜热有关的量。对应的$\varepsilon=0$的问题我们记为（1′）式（并且记相应的$h(0)=\overline{b}$）。对（1）式的初边值加以适当的限制，可以证明（1）式解的存在唯一性及自由边界的单调性，在此基础上，我们用文献［1，2］的方法得到（1）式解的积分估计，并由此证明（1）式的解一致收敛于（1′）式的解。

1　预备定理及引理

首先给出：

引理 1：在假设

$$g\in C^1(R)\cap W_2^1(R),\quad g\leqslant-\lambda \tag{2}$$

$$u_{0\varepsilon}\in C^2[0, b_\varepsilon]\cap W_2^1[0, b_\varepsilon],\quad u_{0\varepsilon}\geqslant 0,$$
$$u'_{0\varepsilon}\leqslant-\lambda \text{ 且} \inf_{[0, b_\varepsilon]} u'_{0\varepsilon} \text{与 } \varepsilon \text{ 无关} \tag{3}$$

$$\begin{cases} g(0)=u'_{0\varepsilon}(0),\quad u_{0\varepsilon}(b_\varepsilon)=0\\ \varepsilon u''_{0\varepsilon}(b_\varepsilon)-\lambda u'_{0\varepsilon}(b_\varepsilon)-u'_{0\varepsilon}(b_\varepsilon)^2=0\end{cases} \tag{4}$$

之下，对固定的$\varepsilon>0$，如果（1）式有古典解，则其自由边界必单调增，即$h'_\varepsilon(t)>0$，从而（1）式的自由边界条件等价于：

$$\varepsilon h_\varepsilon(t)=-\lambda t+\varepsilon b_\varepsilon-\int_0^t g(t)\mathrm{d}t-\int_0^{h_\varepsilon(t)} u_\varepsilon(x, t)\mathrm{d}x+\int_0^b u_{0\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

证明：如果$(u_\varepsilon(x, t), h_\varepsilon(t))$是（1）式的古典解，$h_\varepsilon\in C^1[0, T]$，作变换$v_\varepsilon=\partial_x u_\varepsilon$并通过自由边界上条件的叠代，可知$v_\varepsilon$在$x=h_\varepsilon(t)$上满足（为简单起见，下面将省写一些下标 ε）。

$$\varepsilon\partial_x v-\lambda v-v^2=0 \tag{6}$$

由u在$x=h(t)$上处处取最小值 0，得$v(h(t), t)=\partial_x u(h(t), t)<0$，于是由$v$所满足的方程及初边值条件得恒有$v<0$，从而可以令$v_1=1/v$，则$v_1$满足：

* 收稿日期：2001－06－27
作者简介：刘玉清（1964－），男，江苏常州人，硕士，主要从事偏微分方程方面的工作。

$$\begin{cases}\partial_t v_1=\partial_{xx}v_1-2(\partial_x v_1)^2/v_1 & 0<x<h(t),\ t>0\\ v_1(0,t)=1/g(t) & t\in[0,T]\\ \varepsilon\partial_x v_1(x,t)+\lambda v_1(x,t)=-1 & \\ & x=h(t),\ t\in[0,T]\\ v_1(x,0)=1/u'_{0\varepsilon} & 0<x<b\end{cases}$$

再令 $v_2(x,t)=v_1(x,t)+1/\lambda$，则 $v_2(x,t)$ 在 $x=h(t)$ 上满足 $\varepsilon\partial_x v_2+\lambda v_2=0$，因此 v_2 不能在 $x=h(t)$ 上取正最大值，负最小值，因此，由其所满足的初边值知 $v_2\geqslant 0$，即 $v\leqslant-\lambda$，从而由（1）式的第3式及 v 的定义知 $h'(t)\geqslant 0$。而由此直接对 u 积分并利用自由边界的单调性交换积分次序即可得（5）式。

注：令 $v_1=v+\lambda$ 由Hopf定理还可以证明：$v\geqslant\min(\inf\limits_{[0,T]}g(t),\ \inf\limits_{[0,b]}u'_{0\varepsilon})$。

利用这一结果，有

定理1：在引理1的假设之下，（1）式存在唯一解 $u_\varepsilon\in C^{1+1,0+1}(\overline{Q}^T)$，$h_\varepsilon\in C^1[0,T]$，并有解的估计：

$$|u_\varepsilon|_0\leqslant M_0 \qquad (7)$$

M_0 依赖于 $|g|_0$，$|u_{0\varepsilon}|_0$，$|h|_0=h(T)$。

$Q_\varepsilon^T=\{(x,t)\,|\,0<x<h_\varepsilon(t),\ 0<t\leqslant T\}$，$Q^T$ 是其简记。

证明：利用（5）式，该定理的证明与通常一相Stefan问题的证明是一样的。

下面的证明需要估计 $|h'|_0$。为此考虑辅助问题：

$$\begin{cases}\partial_t\overline{v}=\partial_{xx}\overline{v} & (x,t)\in Q^T\\ \overline{v}(0,t)=g(t) & 0<t\leqslant T\\ \overline{v}(h(t),t)=-\lambda & 0<t\leqslant T\\ \overline{v}(x,0)=u'_{0\varepsilon}(x) & 0<x<h_\varepsilon(0)=b_\varepsilon\end{cases} \qquad (8)$$

这里 $h(t)$ 就是（1）式的自由边界。

引理2：在引理1的假设之下，（1）式的自由边界有关于 ε 的一致估计：

$$|h'|_0\leqslant G,\quad G\text{ 与 }\varepsilon\text{ 无关} \qquad (9)$$

证明：在区域 $D=\{(x,t)\,|\,h(t)-1/K<x<h(t),\ 0<t\leqslant T\}$ 上考虑辅助函数 $w(x,t)=C\ln(1+K(h(t)-x))\pm\overline{v}(x,t)$，则得到 $|\overline{v}_x|\leqslant M_1$（依赖于 $|u_{0\varepsilon}|_2$，$|g|_0$，b_ε）[3]。

如引理1的证明所述，通过叠代，（1）式的自由边界满足（6）式（在变换 $v=\partial_x u$ 之下），再令 $Z(x,t)=v(x,t)-\overline{v}(x,t)$，易知 $Z(x,t)$ 的负最小值只在 $x=h(t)$ 上取，记该点为 P_0，则 $Z_x(P_0)<0$ 且

$$h'=\frac{-v(h(t),t)-\lambda}{\varepsilon}=\frac{-Z(h(t),t)}{\varepsilon},$$

所以，

$$0\leqslant h'\leqslant\frac{-Z(P_0)}{\varepsilon}=\frac{-(v+\lambda)(P_0)}{\varepsilon}=\frac{v_x(P_0)}{-v(P_0)}$$

（由（6）式得到），引理1已证 $\min(\inf\limits_{[0,T]}g(t),\ \inf\limits_{[0,b]}u'_{0\varepsilon})\leqslant v\leqslant-\lambda$，而 $v_x(P_0)=Z_x(P_0)+\overline{v}_x(P_0)\leqslant\overline{v}_x(P_0)\leqslant M_1$，所以，$h'$ 具有与 ε 无关的界。

2 主要定理及其证明

现在可以给出（1）式解的积分估计。

积分 $\mathrm{d}u_\varepsilon^2/\mathrm{d}t$ 得到（仍然省写 ε）：

$$2\int_0^t\int_0^{h(t)}u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{h(t)}u^2\mathrm{d}x=\int_0^b u_{0\varepsilon}^2\mathrm{d}x-2\int_0^t u(0,t)g(t)\mathrm{d}t \qquad (10)$$

积分 $\mathrm{d}u_{\varepsilon x}^2/\mathrm{d}t$ 得到：

$$2\int_0^t\int_0^{h(t)}u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{h(t)}u_x^2\mathrm{d}x=\int_0^b u'^2_{0\varepsilon}\mathrm{d}x+\int_0^{h(t)}u_x^2(x,\mathrm{h}^{-1}(x))\mathrm{d}x+2\int_0^t(u_xu_{xx})\big|_{x=h(t)}\mathrm{d}t-2\int_0^t g(t)g'(t)\mathrm{d}t \qquad (11)$$

由于 $u(h(t),t)=0$，所以 $(u_xh'+u_t)|_{x=h(t)}=0$，从而 $(u_xu_{xx})|_{x=h(t)}=-h'u_x^2(h(t),t)$ 则（11）式变为：

$$2\int_0^t\int_0^{h(t)}u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{h(t)}u_x^2\mathrm{d}x+2\int_0^t h'u_x^2(h(t),t)\mathrm{d}t=\int_0^b u_{0\varepsilon}^2(x)\mathrm{d}x+\int_0^{h(t)}u_x^2(x,h^{-1}(x))\mathrm{d}x-2\int_0^t g(t)g'(t)\mathrm{d}t \qquad (12)$$

由 $|h'|_0$ 的有界性，则

$$\int_0^{h(t)}u_x^2(x,h^{-1}(x))\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{h(t)}(\lambda+\varepsilon h')|_{t=h^{-1}(x)}\mathrm{d}x\leqslant C(T),$$

从而由(7)式、(10)式、(12)式，

$$2\int_0^t\int_0^{h(t)}u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{h(t)}u^2\mathrm{d}x\leqslant C(T) \qquad (13)$$

$$2\int_0^t\int_0^{h(t)} u_{xx}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^{h(t)} u_x^2 \mathrm{d}x +$$
$$2\int_0^t h' u_x^2(h(t), t)\mathrm{d}t \leqslant C(T) \quad (14)$$

结合方程，有

$$u \in W_2^{2,1}(Q^T) \cap L^\infty(0, T; W_2^1(0, h(t))) \quad (15)$$

定理 2：假设：

$$b_\varepsilon \to \overline{b} \quad (16)$$

$$u_{0\varepsilon}\left(\frac{b_\varepsilon}{\overline{b}}x\right) \to u_0(x) \text{（在 } C[0, \overline{b}] \text{ 中）} \quad (17)$$

如果（1）式的自由边界具有一致估计：$|h'_\varepsilon|_0 \leqslant G$，则对任给有限的 $T>0$，（1）式的解存在子列一致收敛于（1′）式的解。

证明：由 $|h'_\varepsilon|_0 \leqslant G$ 知，h_ε 存在子列一致收敛于 h，再由（15）式，u_ε 存在子列一致收敛于 u[4]，而在区域内部 Q^T，$|u_\varepsilon|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}}$ 关于 ε 是一致的[4]，于是，u_ε 的极限满足（1′）式的方程，（1′）式上自由边界条件用（5）式取极限得到，由 $h'>0$ 很容易得到 $\partial_{xx}u_\varepsilon(0, t)$ 的估计（与 ε 无关）[3]，所以边界 $x=0$ 上也可以取极限，由此（1）式的解收敛于（1′）式的解。

参考文献：

[1] XIE WEIQING. The Stefan Problem with a Kinetic Condition at the Free Boundary [J]. Siam J Math Anal, 1990, 21 (2): 362－373.

[2] Jiang L, Xie W. A Parabolic Equation with Discontinuous Coefficients and Asignorini－type Interface Condition [J]. Acta Sci Natur Univ Pekinensis, 1986 (3): 1－14.

[3] Jiang L, Xie W. A Two－phase Stefan－signorini Problem [J]. Acta Sci Natur Univ Pekinensis 1986 (5): 1－14.

[4] 辜联琨. 二阶抛物型偏微分方程 [M]. 厦门：厦门大学出版社，1995.

The Convergence of the Solution on the Stefan Problem with Resource and a Kinetic Condition at the Free Boundary in one Dimension

LIU Yu－qing

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: We discuss a Stefan Problem with Free Boundary Condition Such as: $-\partial_x u_\varepsilon(x, t) = \lambda + \varepsilon h'_\varepsilon(t)$, get a uniform estimate of the solution with respect to $\varepsilon > 0$ by utilizing the Monotonicity of the free boundary, naturally the convergence of solution is proved.

Key words: free boundary; Monotonicity; convergence