文章编号：1005－8893（2002）01－0051－02

Kantorovich 不等式的一种推广*

汪明瑾
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：给出了 Kantorovich 不等式的一种推广。

关键词：不等式；正定 Hermite 阵；特征值
中图分类号：O 211.5 文献标识码：A

Kantorovich 不等式是一个重要的不等式，它在许多方面都有应用。本文将 Kantorovich 不等式推广为如下的定理。

定理：设 k，s 为自然数，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵，λ_1 和 λ_2 分别为其最大和最小特征值，则对任意非零向量 x

$$\frac{x^{*}\boldsymbol{A}^{k}xx^{*}\boldsymbol{A}^{-s}x}{(x^{*}x)^{2}}\leqslant\frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}\max(\lambda_1^{k-s},\ \lambda_n^{k-s}) \tag{1}$$

其中 x^{*} 表示 x 的共轭转置。若

$$0\leqslant\frac{\lambda_n^{k}-\lambda_n^{-s}(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}}{(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}(\lambda_1^{-s}-\lambda_n^{-s})-(\lambda_1^{k}-\lambda_n^{k})}\leqslant 1$$

则当 $\frac{x}{\|x\|}=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$；$\varphi_1$ 和 φ_2 分别为 λ_1 和 λ_n 对应的标准正交化特征向量；

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda_n^{k}-\lambda_n^{-s}(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}}{(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}(\lambda_1^{-s}-\lambda_n^{-s})-(\lambda_1^{k}-\lambda_n^{k})}},$$

$c_2=\sqrt{1-c_1^2}$；时

$$\frac{x^{*}\boldsymbol{A}^{k}xx^{*}\boldsymbol{A}^{-s}x}{(x^{*}x)^{2}}=\frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}(c_1^2\lambda_1^{\frac{k-s}{2}}+c_2^2\lambda_n^{\frac{k-s}{2}})^2 \tag{2}$$

证明：设 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$。则存在酉阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{*}\Lambda\boldsymbol{U}$。记 $y=\boldsymbol{U}x$，

$$p_i=\frac{|y_i|^2}{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2},\quad i=1,\ \cdots,\ n$$

问题归结为对 $p_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{k}p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-s}p_i\right)\leqslant\frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}\max(\lambda_1^{k-s},\ \lambda_n^{k-s})$$

仿文献 [1] 的证明方法，定义随机变量 ζ，$p(\zeta=\lambda_i)=p_i$，$i=1$，$\cdots$，n。因为

$$p\left\{(\zeta^{\frac{k+s}{2}}-\lambda_n^{\frac{k+s}{2}})(\zeta^{-\frac{k+s}{2}}-\lambda_1^{-\frac{k+s}{2}})\geqslant 0\right\}=1,$$

所以

$$p\left\{(\lambda_n^{-s/2}\zeta^{k/2}-\lambda_n^{k/2}\zeta^{-s/2})(\lambda_1^{k/2}\zeta^{-s/2}-\lambda_1^{-s/2}\zeta^{k/2})\geqslant 0\right\}=1$$

从而有

$$E(\lambda_n^{-s/2}\zeta^{k/2}-\lambda_n^{k/2}\zeta^{-s/2})(\lambda_1^{k/2}\zeta^{-s/2}-\lambda_1^{-s/2}\zeta^{k/2})\geqslant 0$$

展开得

$$(\lambda_n^{-s/2}\lambda_1^{k/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})E\zeta^{\frac{k-s}{2}}\geqslant$$
$$\lambda_n^{-s/2}\lambda_1^{-s/2}E\zeta^{k}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{k/2}E\zeta^{-s}\geqslant$$
$$2(\lambda_n^{-s/2}\lambda_1^{-s/2}\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{k/2})^{1/2}(E\zeta^{k}E\zeta^{-s})^{1/2}$$

故

* 收稿日期：2001－09－29
基金项目：江苏石油化工学院科研基金资助
作者简介：汪明瑾（1961－），男，安徽歙县人，硕士，副教授，主要研究方向为概率统计。

$$E\zeta^k E\zeta^{-s} \leqslant \frac{(\lambda_n^{-s/2}\lambda_1^{k/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_n^{k-s}\lambda_1^{k-s}}} E^2\zeta^{\frac{k-s}{2}}$$

当 $k \geqslant s$ 时，$E\zeta^{\frac{k-s}{2}} \leqslant \lambda_1^{\frac{k-s}{2}}$；当 $k < s$ 时，$E\zeta^{\frac{k-s}{2}} \leqslant \lambda_n^{\frac{k-s}{2}}$，所以

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k p_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-s} p_i\right) \leqslant \frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}\max(\lambda_1^{k-s}, \lambda_n^{k-s})$$

若 $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$；其中 φ_1 和 φ_2 分别为 λ_1 和 λ_2 对应的标准正交化特征向量；

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_n^k - \lambda_n^{-s}(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}}{(\lambda_1\lambda_n)^{\frac{k+s}{2}}(\lambda_1^{-s}-\lambda_n^{-s}) - (\lambda_1^k - \lambda_n^k)}},$$

$c_2 = \sqrt{1-c_1^2}$。则随机变量 ζ 的分布为

$p(\zeta=\lambda_1) = c_1^2$，$p(\zeta=\lambda_n) = c_2^2$；所以

$$p\left\{(\lambda_n^{-s/2}\zeta^{k/2}-\lambda_n^{k/2}\zeta^{-s/2})(\lambda_1^{k/2}\zeta^{-s/2}-\lambda_1^{-s/2}\zeta^{k/2})=0\right\}=1,$$

$\lambda_n^{-s/2}\lambda_1^{-s/2}E\zeta^k = \lambda_n^{k/2}\lambda_1^{k/2}E\zeta^{-s}$ 且 $E\zeta^{\frac{k-s}{2}} = c_1^2\lambda_1^{\frac{k-s}{2}} + c_2^2\lambda_n^{\frac{k-s}{2}}$。所以

$$\frac{x^*A^kxx^*A^{-s}x}{(x^*x)^2} = \frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}\left(c_1^2\lambda_1^{\frac{k-s}{2}}+c_2^2\lambda_n^{\frac{k-s}{2}}\right)^2$$

证毕

推论 1[2]：（Kantorvich 不等式）设 A 为正定 Hermite 阵，λ_1 和 λ_n 分别为其最大和最小特征值，则对任意非零向量 x

$$\frac{x^*Axx^*A^{-1}x}{(x^*x)^2} \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

当 $x = (\varphi_1+\varphi_2)/\sqrt{2}$ 时，等号成立。其中 φ_1 和 φ_n 分别为 λ_1 和 λ_n 对应的标准正交化特征向量。

证明：这只要在（1）式，（2）式中令 $k=s=1$ 即得。

推论 2：设 A 为正定 Hermite 阵，λ_1 和 λ_n 分别为其最大和最小特征值，$k \geqslant s$，则对任意非零向量 x

$$\frac{x^*A^kxx^*A^{-s}x}{(x^*x)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{k-s}{2}}(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2$$

证明：注意到 $k \geqslant s$ 时，$E\zeta^{\frac{k-s}{2}} \leqslant \lambda_1^{\frac{k-s}{2}}$，由定理的证明即得。

推论 3：设 A 为正定 Hermite 阵，λ_1 和 λ_n 分别为其最大和最小特征值，$k \leqslant s$，则对任意非零向量 x

$$\frac{x^*A^kxx^*A^{-s}x}{(x^*x)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{\frac{k-s}{2}}(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2$$

证明：注意到 $k \leqslant s$ 时，$E\zeta^{\frac{k-s}{2}} \leqslant \lambda_n^{\frac{k-s}{2}}$，由定理的证明即得。

参考文献：

[1] 汪明瑾．对称随机变量的平均不等式［J］．江西师范大学学报（自然科学版），1995，19（4）：301－303.

[2] 王松桂，贾忠贞．矩阵论中不等式［M］．合肥：安徽教育出版社，1994.144－153.

An Extention of Kantorovich Inequalities

WANG Ming－jin

（Department of Information Science，Jiangsu Institute of Petrochemical Technology，Changzhou 213016，China）

Abstract：In this paper，the author proves that：for any natural number k，s and vector $x \neq 0$，the inequalities

$$\frac{x^*A^kxx^*A^{-s}x}{(x^*x)^2} \leqslant \frac{(\lambda_1^{k/2}\lambda_n^{-s/2}+\lambda_n^{k/2}\lambda_1^{-s/2})^2}{4\sqrt{\lambda_1^{k-s}\lambda_n^{k-s}}}\max(\lambda_1^{k-s}, \lambda_n^{k-s})$$

hold，where A is positive Hermitian matrix，λ_1 and λ_n are respectively the maximum eigenvalue and minimum eigenvalue of A；x^* is conjugate transpose of x.

Key words：inequality；positive Hermitian matrix；eigenvalue