第 14 卷第 2 期　　江 苏 石 油 化 工 学 院 学 报　　Vol. 14 No. 2
2002 年 6 月　　JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY　　Jun. 2002

文章编号：1005－8893（2002）02－0047－04

基于 B－样条插入图形显示算法的图象仿射变换*

石澄贤[1]，王洪元[2]，夏德深[3]
（1. 江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016；2. 江苏石油化工学院；3. 南京理工大学 计算机系）

摘要：图象进行放大、缩小和旋转是图象处理的一项基本任务，一般采用 B－样条插值来实现。应用 B－样条插入图形显示算法于一般的图象仿射变换。提出的算法不用计算 B－样条函数的显式值，而是利用 B－样条的尺度关系计算采样点的值，具有一致且简单的编码。通过对误差限的调节，可以得到不同精度的变换图象，计算时间随不同的精度而变化。

关键词：B－样条；图象；仿射变换；放大
中图分类号：TN 911.73　　文献标识码：A

在图象处理和应用中，对图象进行放缩和旋转是一项基本工作。医学图象、遥观图象和各种图象处理软件中都会用到。实质上，图象的放大、缩小和旋转都是仿射变换的特例。一般来讲，要从低分辨率图象获得高分辨率图象，其最直接的方法就是对图象进行灰度值的插值处理。插值处理方法常用的有多项式插值和样条插值。通过插值函数再重新采样，达到图象处理的目的。从逼近理论上看，采用样条函数插值有很多优点。当曲面充分光滑时，逼近阶随样条次数增加而增加，可以达到很高的逼近阶。线性内插计算次数少，所用时间短。但是，线性内插对曲面逼近阶低，放大倍数稍大会出现马赛克现象，视觉效果变差。常用三次 B－样条进行插值，作为图象的表达函数。三次 B－样条函数[1]具有计算量小和较高的逼近阶 $O(h^4)$，其中 h 为网格的最大直径。三次 B－样条函数对图象逼近具有很好的视觉效果。插值逼近一般利用三次 B－样条函数的显式表达式计算函数值。在此基础上，Robert G. Keys 引入斜投影算子[2,3]达到了更好的效果。

数字图象是二维离散信号，对它插值可采用张量积形式。这里给出一维插值模型：设插值结点为 x_i（$i=0, 1, \cdots, N$），节点处的函数值为 $y_i=f(x_i)$（$i=0, 1, \cdots, N$），$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$（$i=0, 1, \cdots, N-1$），则对于 $x\in[x_0, x_N]$，插值函数为

$$g(x)=\sum_k a_k S_k(x)$$

其中 $S_k(x)$ 为插值基函数，a_k 为插值系数。

$g(x)$ 满足：

$$g(x_i)=f(x_i)\qquad i=0, 1, \cdots, N$$

图象进行仿射变换需要利用图象的插值函数重新进行采样。重新采样可直接计算插值函数的值。对于 B－样条，可以利用其两尺度关系，不需要利用 B－样条函数的显式表达式就可以把 $g(x)$ 在结点二分处的值计算出来。这样就可以近似地计算出在采样点的函数值。

1　图象的仿射变换

设仿射变换 $\varphi: R^2\to R^2$ 有

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\qquad(1)$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$。

（1）式可以写成[4]

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}=$$

* 收稿日期：2002－04－18
作者简介：石澄贤（1961－），男，江苏无锡人，硕士，副教授，主要研究方向为小波分析、图象处理。

$$\begin{pmatrix} r\cos\phi & -s\sin\phi \\ r\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

r，s 分别为 x，y 轴方向上的压缩率，θ，ϕ 分别为 x，y 轴的旋转角度。b_1，b_2 分别为位移。变换就是图象绕 xoy 坐标下的点（b_1，b_2）旋转和变形。一般让图象绕图象的中心旋转，即图象绕图象所占区域的形心旋转。设图象所在区域为 D，则形心坐标为

$$x_h=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \qquad y_h=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \quad (3)$$

仿射变换（2）式的逆变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi_1^{-1}(x^*,\ y^*) \\ \varphi_2^{-1}(x^*,\ y^*) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\phi & \frac{1}{r}\sin\phi \\ -\frac{1}{s}\sin\theta & \frac{1}{s}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*-b_1 \\ y^*-b_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

设图象的函数为 $z=f(x,\ y)$ 经仿射变换后为 $z^*=f(\varphi_1^{-1}(x^*,\ y^*),\ \varphi_2^{-1}(x^*,\ y^*))$。

2 B—样条和两尺度关系[5]

定义 对于每个整数 m，m 阶且具有节点序列 Z 的基数样条空间 S_m 是满足 $f(x)\in C^{m-2}$，对 $x\in[k,\ k+1]$，$k\in Z$，$f(x)\in\pi_{m-1}$ 的所有函数的集合，即

$f|_{[k,\ k+1]}\in\pi_{m-1}$，$k\in Z$

其中 π_{m-1} 为次数不超过 $m-1$ 次的代数多项式的集合。

令 V_0^m 表示 $S_m\cap L^2(R)$ 的 $L^2(R)$ 闭包；S_m^j 表示具有节点序列 $2^{-j}Z$，$j\in Z$ 的基数样条空间；V_j^m 表示 $S_m^j\cap L^2(R)$ 的 $L^2(R)$ 闭包。因此有 $L^2(R)$ 的基数样条闭子空间的一个嵌套序列：

$$\cdots\subset V_{-1}^m\subset V_0^m\subset V_1^m\subset\cdots \quad (5)$$

且满足

$$\begin{cases} \mathrm{clos}_{L^2(R)}\left(\bigcup_{j\in Z}V_j^m\right)=L^2(R) \\ \bigcap_{j\in Z}V_j^m=\{0\} \end{cases} \quad (6)$$

m 阶基数 B—样条的定义：

$$N_m(x)=(N_{m-1}*N_1)=\int_0^1 N_{m-1}(x-1)\mathrm{d}t \quad m\geqslant 2 \quad (7)$$

其中 $N_1(x)$ 是区间 $[0,\ 1]$ 的特征函数。

$N_m(x)$ 是 V_0^m 中的 m 阶基数样条函数。$\{N_m(x)\}$ 构成了 V_0^m 的一组 Riesz 基。进一步 $\left\{2^{\frac{j}{2}}N_m(2^jx-k)\right\}$ 是 V_j^m 的一个 Riesz 基。因为 $N_m(2^jx)\in V_j^m$ 和 $V_j^m\in V_{j+1}^m$，则

$$N_m(2^jx)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_{m,k}N_m(2^{j+1}x-k) \quad (8)$$

其中 $\{p_{m,k},\ k\in Z\}$ 是 l^2 中的某个序列。可得[1]

$$p_{m,k}=\begin{cases} 2^{-m+1}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} & 0\leqslant k\leqslant m \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

m 阶基数 B—样条的两尺度关系[1]为

$$N_m(x)=\sum_{k=0}^{m}2^{-m-1}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}N_m(2x-k) \quad (10)$$

3 插入图形显示算法[5]和图象仿射变换的实现

m 阶具有节点序列 2^{-j_0} 的一个基数样条函数为

$$f_{j_0}(x)=\sum_l a_l^{j_0}N_m(2^{j_0}x-l) \quad (11)$$

其中 j_0 是一个整数。

对于任何预先指定的整数 $j_1\geqslant j_0$，要求 $f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right)$，$k\in Z$ 的值。对于每个 $j\geqslant j_0$，使用记号

$$f_j(x)=\sum_l a_l^jN_m(2^jx-l) \quad (12)$$

利用两尺度关系公式（10）和 $f_{j+1}(x)=f_j(x)$ 得

$$\sum_l a_l^{j+1}N_m(2^{j+1}x-l)=\sum_l a_l^jN_m(2^jx-l)=$$

$$\sum_l a_l^j\sum_k p_{m,k}N(2^{j+1}-2l-k)=$$

$$\sum_l\left\{\sum_k p_{m,l-2k}a_l^j\right\}N_m(2^{j+1}x-l)$$

得

$$a_l^{j+1}=\sum_k p_{m,l-2k}a_l^j \quad l\in Z \quad (13)$$

计算 $f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right)$，$k\in Z$ 可用下面的公式

$$f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right)=\sum_l a_l^{j_1}N_m\left(2^{j_1}\frac{k}{2^{j_1}}-l\right)=\sum_l a_l^{j_1}N_m(k-l)$$

$$=\sum_l w_{m,k-l}\,a_l^{j_1} \quad (14)$$

其中 $w_{m,k}=N_m(k)$，$k\in Z$。

式（13）、式（14）为插值图形算法的基本思想。

三次 B—样条容易计算得

$$\{p_{4,0},\ p_{4,1},\ \cdots,\ p_{4,4}\}=\left\{\frac{1}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{1}{8}\right\}$$
$$\{w_{4,1},\ w_{4,2},\ w_{4,3}\}=\left\{\frac{1}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{1}{6}\right\} \qquad (15)$$

实现数字图象的仿射变换，就是一个重采样显示的过程。设原图象所在区域为 Ω，原图象变换后的所在区域为 Ω'。设（x_0^*，y_0^*）$\in\Omega'$，

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos\theta & \frac{1}{r}\sin\phi \\ -\frac{1}{s}\sin\theta & \frac{1}{s}\cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0^*-b_1 \\ y_0^*-b_2 \end{pmatrix}$$

则（x_0，y_0）$\in\Omega$。把 Ω 上的离散结点作为 B—样条插值节点，这些点的灰度值作为被插函数的函数值，可求出 B—样条插值函数 B_f（x，y）。变换后图象在（x_0^*，y_0^*）处的灰度值取 B_f（x_0，y_0）。点（x_0，y_0）就是重采样点。仍就一元函数为例说明利用插值图形算法计算重采样点的值。对于每个 x_0，必可以找到 $j_1\geqslant j_0$ 和 k 使 $\left|\frac{k}{2^{j_1}}-x_0\right|\leqslant\delta$，其中 δ 为给定的误差。$f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right)$ 的值作为 f（x_0）的近似值。进一步就得到 x_0^* 处的灰度值。$f_{j_0}\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right)$ 有式（13）、式（14）计算。实际应用中采用双三次 B—样条来进行插值。选择合适的误差 δ 得到清晰的变换图象（接近三次 B—样条显式计算）。

4 实验结果和分析

实验以 128×128 的 woman2. fig 进行变换，δ＝0. 5。图 1 为原图，图 2～图 6 是各种变换结果，图 2、图 3、图 4 和原图比较没有什么明显退化，图 5、图 6 的图象有一些平滑效果，图 7 是利用双线性插值旋转再放大的结果，图 5 效果比图 7 的要好。总之，利用 B—样条的插值图形显示算法进行图象仿射变换，可以得到质量有保证的高分辨变换图象，且计算次数比 B—样条显式少，计算机上容易实现，具有实际应用价值。

图 1 原图

图 2 $r=1.2$，$s=1$，$\varphi=\pi/4$，$\theta=\pi/6$

图 3 $\varphi=\theta=\pi/4$，$r=0.6$，$s=1$

图 4 $\varphi=\theta=\pi/4$，$r=1.5$，$s=1$

图 5 $\varphi=\theta=\pi/6$，$r=s=1.5$

图 6　$\varphi=\theta=\pi/6$, $r=s=2.5$

图 7　双线性插值 $\varphi=\theta=\pi/6$, $r=s=1.5$

参考文献:

[1] 李岳生，黄友谦. 数值逼近 [M]. 北京：人民教育出版社，1978. 76—140.

[2] Robert G Keys. Cubic Convolution Interpolation for Digitial Image Processing [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1981, ASSP—29 (6): 1 153—1 160.

[3] Chuihee Lee, Murray Eden, Michael Unser. High—quality Image Resizing Using Oblique Projection Operators [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7 (5): 679—692.

[4] 孙家广. 计算机图形学 [M]. 第三版. 北京：清华大学出版社，1998. 358—390.

[5] 崔锦泰，程正兴. 小波分析导论 [M]. 西安：西安交通大学出版社，1991. 100—150.

Image Affine Transform with B—spline Interpolatory Graphical Display Algorithm

SHI Cheng—xian[1], WANG Hong—yuan[2], XIA De—shen[3]

(1. Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China; 2. Jiangsu Institute of Petrochemical Technology; 3. Computer Department, Nanjing University of Science and technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Affine transform of image is a basic task in image processing. The B—spline interpolatory function is generally adopted in the algorithms of image affine transform. In this paper we applied B—spline interpolatory graphical display algorithm to image affine transform. New algorithm need not directly compute values of B—spline interpolatory function, the values were computed using B—spline scaling relation on sampling points, which had simple and uniform coding. Various degrees of accuracy of image affine transform can be achieved and the time of computing can be controlled by setting different error bound.

Key words: B—spline; image; affine transform; enlargement