文章编号：1005－8893（2002）02－0054－03

# 人口有增长的具有暂时免疫的流行病模型（SIRS 模型）*

沃松林，许　波
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：研究人口有增长的，具有暂时免疲的流行病模型（SIRS 模型）的平衡点存在性、全局渐近稳定性和解的有界性。

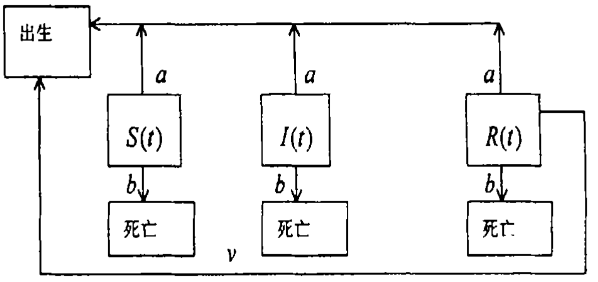
关键词：SIRS 流行病模型；平衡点；全局渐近稳定性；有界性
中图分类号：O 175.12　　　文献标识码：A

1927 年，Kermack 和 Mckendrick 提出的 SIR 模型是经典的流行病模型，以后一些学者对其进行了各种不同形式的推广，也有一些流行病，患者感染后成为潜在病毒携带者，以后即使不与病人接触也会由于某些因素的刺激而复发，如单纯疱疹病毒 HSV 可以在人体神经组织内长期潜伏，以后遇到各种非特异性刺激如发热、寒冷、月经等及某些病毒感染复发，文献 [1] 建立并分析了具有线性接触率的人或动物种群中疱疹感染的数学模型。本文研究人口有增长的，具有暂时免疲的流行病模型（SIRS 模型）。

假设某地区人群分成 3 类：S 类：易感染者（Susceptible）类，是在这一地区未得病者，假若让其与得病者接触，就容易受传染而得病的人。I 类：染病者（Infective）类，是在这一地区已染上传染病的人，让他与易感染者的人接触，即可把病传染给易感染者。R 类：消除者（removed）类，是在这一地区因为染病病愈具有暂时免疫能力的人。

为讨论方便起见，我们不妨假设：①系统是封闭的，没有迁移。②新出生者属于 $S(t)$ 类。易感染者由于受传染病的影响，其人数随时间的变化的变化率与当时受感染患者的人数和当时染病者的人数之积成正比。从染病者到消除者的速度与当时染病者的人数成正比。③传染病病愈之后，具有暂时免疫力，以后还会受疾病的感染。④3 类人群的自然死亡率均为 $b$；出生率均为 $a$；$\beta$，$\gamma$，$v$ 分别表示接触率、传染失去率、免疫失去率。⑤不考虑因传染病而死亡。

框式为：




建立数学模型为：

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI - bS + a(S+I+R) + vR \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - (b+r)I \\ \dfrac{dR}{dt} = rI - (b+v)R \end{cases} \tag{E}$$

记总的人口数为 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$，易知 $N(t)$ 满足方程：

$$\frac{dN}{dt} = (a-b)N$$

* 收稿日期：2001－12－05
作者简介：沃松林（1964－），男，江苏丹阳人，副教授，主要从事生物数学和生物控制方面的研究。

从而：$N(t)=N_0e^{(a-b)t}$

（$N_0=N(0)$ 为 $t=0$ 时的人口总数）

系统（E）可化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\beta I\left[N_0e^{(a-b)t}-I-R\right]-(b+r)I\\ \dfrac{dR}{dt}=rI-(b+v)R\end{cases}\qquad (E)_1$$

记 $x(t)=I(t)$，$y(t)=R(t)$ 系统 $(E)_1$ 化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\beta x\left[N_0e^{(a-b)t}-x-y\right]-(b+r)x\\ \dfrac{dy}{dt}=rx-(b+v)y\end{cases}\qquad (1)$$

由生态意义：只须对系统（1）在 $\Omega=\{(x,y):x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 内讨论。这里：$N_0$，$a$，$b$，$r$，$v$ 均为正数。

记：$x^*=\dfrac{\beta N_0-(b+r)}{\beta\left(1+\dfrac{r}{b+v}\right)}$，$y^*=\dfrac{r}{b+v}x^*$

$(x(t),y(t))$ 是系统（1）$t=0$ 以 $(x_0,y_0)$ 为正初值的轨线。

定理 1：若 $a\leqslant b$，则：系统（1）的一切正初值的正半轨线有界。

证明：对任意 $(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，显然：$x(t)\geqslant 0$，$y(t)\geqslant 0$。

取 $M_1=\max\{N_0,\ x_0\}>0$，

$M_2=y_0+\dfrac{rM_1}{b+v}>0$，由

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=M_1}=$$

$$x\left[\beta\left(N_0e^{(a-b)t}-x-y\right)-(b+r)\right]\Big|_{x=M_1}\leqslant$$

$$x\left[\beta\left(N_0-x-y\right)-(b+r)\right]\Big|_{x=M_1}<0$$

（当 $t>0$），

从而：$0\leqslant x(t)\leqslant M_1$

又有：$\dfrac{dy}{dt}=rx-(b+v)y$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{(b+v)t}\right)=rxe^{(b+v)t}\leqslant rM_1e^{(b+v)t}$$

不等式两边 $t$ 从 0 到 $t$ 积分（$t>0$）得到：

$$y(t)\leqslant y_0e^{-(b+v)t}+\frac{rM_1}{b+v}\left(1-e^{-(b+v)t}\right)\leqslant M_2$$

即：$0\leqslant y(t)\leqslant M_2$

所以，当 $a\leqslant b$ 时，系统（1）的一切正初值的正半轨线有界。

定理 2：当 $a=b$ 时，系统（1）在 $\Omega$ 内不存在闭轨线。

证明：当 $a=b$ 时，系统（1）化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\beta x\left[N_0-x-y\right]-(b+r)x=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=rx-(b+v)y=Q(x,y)\end{cases}\qquad (2)$$

取 $B(x,y)=\dfrac{1}{x}$，因为：

$$\mathrm{Div}(BP,\ BQ)=-\beta-\frac{b+v}{x}<0$$

由 Dulac 定理知道[2]：系统（1）在 $\Omega$ 内不存在闭轨线。

对系统（2）经过简单计算可知[3]：①当 $\beta N_0-(b+r)\leqslant 0$ 时，系统（2）在 $\Omega$ 内只有一个平衡点 $O(0,0)$，它是稳定的。②当 $\beta N_0-(b+r)>0$ 时，系统（2）在 $\Omega$ 内有两个衡点 $O(0,0)$，$M^*(x^*,y^*)$，且 $O(0,0)$ 为鞍点，$M^*(x^*,y^*)$ 为稳定的。

推论：当 $a=b$ 时，系统（1）在 $\Omega$ 内有：①当 $\beta N_0-(b+r)\leqslant 0$ 时，$O(0,0)$ 全局渐近稳定。②当 $\beta N_0-(b+r)>0$ 时，$M^*(x^*,y^*)$ 全局渐近稳定。

定理 3：当 $a<b$ 时，有：$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$

证明：由 $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\beta\left[N_0e^{(a-b)t}-x-y\right]-(b+r)$

等式两边 $t$ 从 0 到 $t$ 积分得到：

$$\ln\frac{x}{x_0}=\frac{\beta N_0}{b-a}\left(1-e^{(a-b)t}\right)-\beta\int_0^t(x+y)dt-(b+r)t$$

所以：$0\leqslant x=x_0e^{-(b+r)t}\cdot e^{\frac{\beta N_0}{b-a}\left(1-e^{(a-b)t}\right)}\cdot e^{-\beta\int_0^t(x+y)dt}$

有：$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ 且 $0\leqslant x\leqslant x_0e^{-(b+r)t}\cdot e^{\frac{\beta N_0}{b-a}}$

又由 $\dfrac{dy}{dt}+(b+v)y=rx\leqslant rx_0e^{-(b+r)t}\cdot e^{\frac{\beta N_0}{b-a}}$

有 $\left[e^{(b+r)t}y(t)\right]'\leqslant rx_0e^{(v-r)t}\cdot e^{\frac{\beta N_0}{b-a}}$

不等式两边 $t$ 从 0 到 $t$ 积分（$t>0$）得到：

①当 $v\neq r$ 时，$0\leqslant y(t)\leqslant y_0e^{-(b+v)t}+\dfrac{rx_0}{v-r}e^{\frac{\beta N_0}{b-a}}\left(e^{-(b+r)t}-e^{-(b+v)t}\right)$

②当 $v=r$ 时，$0\leqslant y(t)\leqslant y_0e^{-(b+v)t}+rx_0e^{\frac{\beta N_0}{b-a}}te^{-(b+v)t}$

所以：$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$

引理：当 $a>b$ 时，系统（1）不存在周期解。

证明：（反证法）设系统（1）有周期解 Γ，它的最小正周期为 $T>0$

由 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\beta[N_0e^{(a-b)t}-x-y]-(b+r)$

沿 Γ 积分：

$$0=\frac{\beta N_0}{b-a}(e^{n(a-b)T}-1)-\beta\int_0^{nT}(x+y)dt-n(b+r)T\text{（对任意自然数 } n\text{）}\quad(3)$$

又：$r\int_0^{nT}xdt=(b+v)\int_0^{nT}ydt=nr\int_0^{T}xdt$ 代入（3）式有：

$$\frac{\beta N_0}{b-a}(e^{n(a-b)T}-1)-n\beta\left(1+\frac{r}{b+v}\right)\int_0^{T}xdt-n(b+r)T=0\text{（对任意自然数 } n \text{ 成立）}\quad(4)$$

又：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n(a-b)T}-1}{n}=+\infty$ 与（4）式矛盾。

所以当 $a>b$ 时，系统（1）不存在周期解。

定理 4：当 $a>b$ 时，有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$，$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=+\infty$

证明：由 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}-\frac{\beta}{b+v}\frac{dy}{dt}=\beta N_0e^{(a-b)t}-\beta x-\frac{r\beta}{b+v}x-(b+r)$

从而 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}+\beta\left(1+\frac{r}{b+v}\right)x=\frac{\beta}{b+v}\frac{dy}{dt}+\beta N_0e^{(a-b)t}-(b+r)$

等式两边 $t$ 从 0 到 $t$ 积分得到：

$$\ln\frac{x}{x_0}+\beta\left(1+\frac{r}{b+v}\right)\int_0^t xdt=\frac{\beta}{b+v}(y-y_0)+\frac{\beta N_0}{a-b}(e^{(a-b)t}-1)-(b+r)t$$

由：$\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{\beta N_0}{(a-b)t}(e^{(a-b)t}-1)-(b+r)\right]=+\infty$ 得：

$x(t)\geqslant 0$，$y(t)\geqslant 0$，

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\beta N_0}{a-b}(e^{(a-b)t}-1)-(b+r)t\right]=+\infty$$

所以：

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\frac{x}{x_0}+\beta\left(1+\frac{r}{b+v}\right)\int_0^t xdt\right]=+\infty\quad(5)$$

假设 $x(t)$ 有界，即 $|x(t)|\leqslant M$，$M>0$，由 $\frac{dy}{dt}+(b+v)y=rx\leqslant rM$ 可得：

$$0\leqslant y(t)\leqslant y_0e^{-(b+v)t}+\frac{rM}{b+v}(1-e^{-(b+v)t})$$

从而 $y(t)$ 有界。所以存在 $T_0>0$，当 $t>T_0$ 时有

$$\beta\left[\frac{1}{2}N_0e^{(a-b)t}-x-y\right]-(b+r)\geqslant 0$$

而 $\frac{dx}{dt}=x\{\beta[N_0e^{(a-b)t}-x-y]-(b+r)\}\geqslant\frac{\beta}{2}N_0e^{(a-b)t}x$

从而 $x(t)\geqslant$

$$x(T_0)\exp\left\{\frac{\beta N_0}{2(a-b)}[e^{(a-b)t}-e^{(a-b)T_0}]\right\}\to+\infty$$

（$t\to+\infty$）矛盾。

即 $x(t)$ 无界，从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$

又由 $\frac{dy}{dt}+(b+v)y=rx$ 可得：

$$0\leqslant y(t)=y_0e^{-(b+v)t}+e^{-(b+v)t}\int_0^t x(s)e^{(b+v)s}ds$$

由 L'Hospital 法则可得：$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=+\infty$。

参考文献：


[1] David Tudor. A Deterministic Model for Herps Infections in Human and Animal Populations [J]. SIAM Review, 1990, 1: 32.

[2] 张正芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论 [M]. 北京：科学出版社，1985. 51－58.

[3] 叶彦谦. 极限环论 [M]. 上海：上海科技出版社，1984. 15, 16.


## SIRS Epidemiological Model with Population Growth


WO Song－lin, XU Bo

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)



**Abstract**: Since Kermack and Makenclrick put forward the classical epidemiological model (SIR), many people have popularized their model. In this paper, we studied the SIRS epidemiological model with population growth. We analyzed the relations between those who are susceptible, the infected and the removed, and obtain the equilibrium point existence, their global asymptotic stability and bounded solutions.



**Key words**: SIRS epidemiological model; equilibrium point; global asymptotic stability; bounded