文章编号：1005－8893（2002）03－0054－03

正则环和广义优越扩张*

赵志新
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：设 S 是 R 的广义优越扩张。讨论了 R 的性质对 S 的影响及 S 的性质对 R 的影响，并利用新的结果改进和推广了一些已知的结论。

关键词：广义优越扩张；SF－环；SPI－环；正则环
中图分类号：O 175　　文献标识码：A

优越扩张是环的一类重要扩张，它包括了环 R 上的全矩阵环以及环 R 与有限群 G（这里 $|G|^{-1}\in R$）的斜群环 $R^{*}G$。关于优越扩张的研究已出现了许多重要的成果。我们在文献 [1] 中叙述过。本文继续文献 [1] 探讨在广义优越扩张下环 R 与环 S 的性质的相互关系。

设环 R 是环 S 的子环，且 R 和 S 具有相同的单位元，如果存在有限集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\in S$，$S=\sum_{i=1}^{n}a_iR$，$a_iR=Ra_i$（$i=1\sim n$），称 S 是环 R 的有限正规扩张。Shamsuddin A 在文献 [2] 中研究了此种扩张下模及同调维的几个结论。

环扩张 $S\geqslant R$ 称为广义优越扩张如果 S 是 R 的有限正规扩张且满足：S 是投射的即 $N_S\leqslant M_S$，如 $N_R\mid M_R$ 则有 $N_S\mid M_S$。

1 结 论

下面的命题可见文献 [1，2]。

命题 1　S 是 R 的有限正规扩张，则

（1）R－模 M 是平坦的当且仅当 $M\otimes S$ 是 S－平坦；

（2）S_R 是平坦，M_S 是平坦，则 M_R 平坦。

命题 2　S 是环 R 的广义优越扩张，则

（1）M_S 作为 R－模是平坦的，则 M_R 平坦的；

（2）S－模 M 是投射 R－模，那么 M_S 是投射 S－模；

（3）S_R 平坦，则 M_S 是内射当且仅当 M_R 内射的。

环 R 称为右 SF－环如果任一单 R－模都是平坦的，下面的结论是文献 [3，4] 的推广。

定理 3　S 是环 R 的广义优越扩张，S_R 是平坦的，则 S 是 SF－环当且仅当 R 是右 SF－环。

证明：如 R 是右SF－环及 M_S 是半单 S－模由文献 [4] 知 M_R 是半单的，亦即 M_R 是平坦的，从而 $M\otimes S$ 平坦的而 $M_S\cong Q_S$，$Q_S\mid(M\otimes S)_S$，即 M_S 平坦，即有 S 是右 SF－环。

反之如 S 是右 SF－环及 I 是 R 的最大右理想则 S/IS 是半单 S－模，从而 S/IS 是平坦 S－模，从而亦即 S/IS 是半单的平坦 R－模，即有 R/I 是平坦 R－模，就有 R 是右 SF－环。

命题 4　S 是环 R 的广义优越扩张，M_S 是 P－内射的，则 M_R 是 P－内射的。

证明：$I=aR$ 是 R 的右理想。f：$I\rightarrow M$ 是 R－同

* 收稿日期：2002－05－20
基金项目：江苏石油化工学院科研基金资助
作者简介：赵志新（1963－），男，江苏武进人，副教授，主要研究方向为矩阵理论及环理论。

态。令 $J=Ia_1+\cdots+Ia_n=aS$ 是右理想，作映射

$$F: J\to M,\ F\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\,a_i,$$

显然 F 有定义。$S=\sum_{i=1}^{n}a_iR$，$r_ja_j\in S$，$a_iR=Ra_i$，

$$F\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right)r_ja_j\right]=F\left[\sum_{i=1}^{n}x_ir_ja_ia_j\right] \qquad (1)$$

而 $a_ia_j\in S=\sum_{i=1}^{n}Ra_t$，$a_ia_j=\sum_t r_{ijt}a_t$。则

$(1)=F\left[\sum_i x_ir'_j\sum_t r_{ijt}a_t\right]=$
$F\left[\sum_i\sum_t x_ir'_jr_{ijt}a_t\right]=\sum_t f\left(\sum_i x_ir'_jr_{ijt}\right)a_t=$
$\sum_t\sum_i f(x_i)\,r'_jr_{ijt}a_t=\sum_i f(x_i)\,a_ir_ja_j$

即 F 是 S－同态。由 M_S 是 P－内射，知存在 S－同态 G：$S\to M_S$ 使得 $G=F$。易知 G：$R\to M$ 即为 f 的扩张。

定理 5　S 是环 R 的广义优越扩张，则 S 是 SPI－环，则 R 是 SPI－环。

证明：I 是 R 的极大右理想，则 S/IS 是半单 S－模，亦即 S/IS 是半单 P－内射 S－模，由命题 4 知 S/IS 是半单 P－内射 R－模，而 R/I 可嵌入 S/IS 中，从而 R/I 是 P－内射的。那么 R 是 SPI－环。

2　主要结论

Rege M. B. 在文献 [5] 中引入了 SF－环并就 SF－环与正则环的关系展开了讨论，在注 4.13 指出 R 是拟 duo 环如 $Mn(R)$ SF－环则 $Mn(R)$ 是正则环。刘仲奎在文献 [3] 探讨了此问题，下面的结论是这些结论的推广。

定理 1　S 是拟 duo 环 R 的广义优越扩张，S_R 平坦。则有如下的等价：

（1）S 是右 SF－环；

（2）S 是右 V－环；

（3）S 是右 SPI－环；

（4）S 是 Von Neumann 正则环。

证明：(2) → (3)，(4) → (1) 显然。设 S 是右 SF－环，则由定理 3 知 R 是右 SF－环，故由文献 [5] 知 R 是右 V－环，下面证 S 是 V－环，设 M_S 是单右 S－模，由文献 [1] 知 M_R 是单右 R－模。由 R 的性质知 M_R 是内射 R－模，由文献 [6] 知 Hom$(SM)s$ 是 S－内射的，而

$$M_S\subseteq Q_S,\ Q_S\mid \mathrm{Hom}(SM)\,s,$$

M_S 是内射的 S－模，即 S 是 V－环。此即 (1) → (2)。下证 (3) → (4)，设 S 是右 SPI－环由定理 5 知 R 是右 SPI－环，由文献 [5] 知 R 是正则环，再由文献 [1] 知 S 是正则环。

推论 2　S 是拟环 R 的几乎优越扩张，则有下列等价：

（1）S 是右 SF－环；

（2）S 是右 V－环；

（3）S 是右 SPI－环；

（4）S 是 Von Neumann 正则环。

推论 3　R 是拟 duo 环，则有如下的等价：

（1）$Mn(R)$ 是右 SF－环；

（2）$Mn(R)$ 是右 V－环；

（3）$Mn(R)$ 是右 SPI－环；

（4）$Mn(R)$ 是 Von Neumann 正则环。

进一步我们有：

定理 4　S 是 R 的广义优越扩张，R 的不可分解商环是拟 duo 环，S_R 是平坦的，则 S 是右 SF－环 ⇔ S 是 Von Neumann 正则环。

证明：⇐显然。反之，S 是右 SF－环，如 S 不是正则环亦即 R 不是正则环，那么存在 $p\in R$，$p\notin pRp$。

$$Q=\{I\mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想},\ p\notin pRp+I\}$$

易知 Q 是归纳集。由 Zorn 引理存在极大元 A，且 R/A 是不可分解。如

$\dfrac{R}{A}=\dfrac{M}{A}+\dfrac{N}{A}$，$N\not\subset A$，$M\not\subset A$，$M\cap N=A$，$M\notin Q$，$N\notin Q$。$\exists x$，$y$，$p-pxp\in N$，$p=p(x+y-xpy)\,p\in p-pxy-(p-pxp)\,yp\in M=p-pyp-px(p-pyp)\in N$

即 $p-p(x+y-xpy)\,p\in M\cap N=A$，$p\notin pRp+A$ 矛盾，从而 R/A 不可分解，由 R/A 是拟 duo 环及 R 是右 SF－环。由文献 [5] 知 R/A 正则环，$A\in Q\wedge A\notin Q$ 矛盾，R 正则环，亦即 S 是正则环。

推论 5　S 是环 R 的几乎优越扩张，R 的不可分解商环是拟 duo 环，则 S 是右 SF－环 ⇔ S 是 Von Neumann 正则环。

推论 6　R 的不可分解商环是拟 duo 环，则 Mn

（R）是右 SF－环$\Leftrightarrow Mn$（R）是 Von Neumann 正则环。

此推论是文献 [5] 注 4.13 推广。

参考文献：

[1] 赵志新，刘仲奎．广义优越扩张 [J]．江苏石油化工学院学报，1996，8（3）：42－46.

[2] Shamsuddin A. Finite Normaliging Extensions [J]. J of Alg，1992，151：218－220.

[3] 刘仲奎．环的 Excellent 扩张 [J]．数学学报，1991，34（6）：818－824.

[4] Xue Weimin. On a Generaligation of Excullent Extensions [J]. Acta Math Alg Vietnam，1994，19：31－38.

[5] Rege M B. On Von Neumann Regular Rings and SF－rings [J]. Math Jap，1986，31（6）：927－936.

[6] Soueif L. Normaliging Extensions and Injective Modules，Essentially Bounded Normaliging Extensions [J]. Comm 1987，15：565－610.

[7] Passman D S. The Algebraic Structure of Group Rings [M]. New York：Wileg－Interscience，1977.

[8] Ramamurthi V S. On the Injectivity and Flatness of Certain Cyclic Modules [J]. Proc Amer Math Soc，1975，48：21－25.

[9] Zhao Zhixin，Liu Zhongkui. PC－rings and Almost Excellent Extensions [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2001，16（3）：42－47.

Regular Rings and Generalized Excellent Extensions

ZHAO Zhi－xin

（Department of Information Science，Jiangsu Institute of Petrochemical Technology，Changzhou 213016，China）

Abstract：S is a generalized excellent extension of ring R. We obtained the relations between the properties of the ring S and R. Moreover，and the relations of SF－property and regularity.

Key words：regular ring；generalized excellent extension；SF－ring；SPI－ring