第 14 卷第 3 期 江苏石油化工学院学报 Vol. 14 No. 3
2002 年 9 月 JOURNAL OF JIANGSU INSTITUTE OF PETROCHEMICAL TECHNOLOGY Sep. 2002

文章编号：1005－8893（2002）03－0057－02

Emden－Fowler 型差分方程的非振动解*

吴春青
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：Emden－Fowler 型差分方程是一类具有广泛应用的方程，利用不动点定理得到了这种差分方程的无界非振动解的存在性和渐近性质。

关键词：Emden－Fowler 差分方程；非振动解；渐近性质
中图分类号：O 241.3　　文献标识码：A

广义的 Emden－Fowler 微分方程是指形如：

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u^{\gamma}=0,\quad t\geqslant 0 \tag{1}$$

的方程，这里 $p(t)$，$q(t)$ 为连续的正值函数，γ 为大于 0 的实数。在气体动力学，流体力学，核物理等许多领域，一些问题的模型均可化为该方程。人们感兴趣的是该方程解的振动性及渐近性质。方程（1）通过系数变化[1]可化为如下的简单形式：

$$\frac{d^2}{dx^2}x+a(t)x^{\gamma}=0,\quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

微分方程的解反映的是一个连续的变化过程，而差分方程的解则反映一个离散的变化过程。这两者在实际中均有重要地位和各自的特殊性。我们以下讨论方程（2）的离散形式：

$$\Delta^2 x_n+a_n x_{n+1}^{\gamma}=0 \tag{3}$$

的解的振动性。这里 Δ 为前向差分算子，即 $\Delta y_n=y_{n+1}-y_n$。一个解称为非振动的，即是若 n 充分大时有 $y_n>0$（or <0）恒成立，反之称为振动的。方程（3）的解的振动性的一些结果可参看文献[2]，更高阶的情形可参看文献[3]。在文献[2]中，在 $\gamma>0$，$a_n>0$，$n\geqslant N$（N 为某自然数）的条件下，作者给出了方程（3）有一个有界非振动解的充要条件是 $\sum^{\infty} na_n<\infty$。后文中我们给出方程（3）有无界的非振动解的条件及这种解的渐近性质。

1　主要结论

引理：设 $u,\ v\in[a,b]$，$a>0$ 则有

$$|u^{\gamma}-v^{\gamma}|<M\gamma|u-v|$$

这里 M 为正常数。

证明：对 $f(x)=x^{\gamma}$ 在 $[a,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，有

$$|f(u)-f(v)|=|f'(\zeta)||u-v|=\gamma|\zeta^{\gamma-1}||u-v|$$

由于 $\zeta\in(a,b)$，$a>0$，存在常数 M 使得 $|\zeta^{\gamma-1}|\leqslant M$。证毕。

定理：设 $\gamma>0$，$a_n>0$，n 为自然数，则当

$$\sum^{\infty}(n+1)^{\gamma-1}a_n<\infty \tag{4}$$

时，方程有一个无界的非振动解。且该解满足渐近性质

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\alpha,\quad \alpha\neq 0 \tag{5}$$

这里 $\alpha\neq 0$ 为由初始条件决定的常数。

证明：考虑由无穷数列 $Y=\{y_n\}$，$n\geqslant N$ 按范数 $\|Y\|=\sup_{n\geqslant N}\{y_n/n\}$ 构成的 Banach 空间 B。这里 N 为待定的自然数。取空间 B 的一个有界闭子集 S：

* 收稿日期：2002－03－01
作者简介：吴春青（1972－），男，安徽歙县人，硕士，讲师，主要研究方向为差分方程渐近性质。

$$S=\{Y=\{y_n\}:1/4\leqslant y_n/n\leqslant 1/2,\quad n\geqslant N\} \tag{6}$$

定义映射 $T:S\to B$ 为：

$$Ty_n=\frac{n}{2}-n\sum_{i=N-1}^{n-2}a_iy_{i+1}^{\gamma}-\sum_{i=n}^{\infty}ia_{i-1}y_i^{\gamma} \tag{7}$$

直接验证可知，当 $Z=\{z_n\}$，$n\geqslant N$ 为方程（7）的不动点时，Z 为方程（3）的解。下面证明 T 为闭子集 S 上的压缩映射。由式（4）及方程（7）易有 $Ty_n\leqslant n/2$，$n\geqslant N$。又

$$Ty_n\geqslant\frac{n}{2}-n\sum_{i=N-1}^{n-2}a_i\left(\frac{i+1}{2}\right)^{\gamma}-\sum_{i=n}^{\infty}ia_{i-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\gamma}$$
$$=n\left[\frac{1}{2}-\sum_{i=N-1}^{n-2}a_i\left(\frac{i+1}{2}\right)^{\gamma}-\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{\infty}ia_{i-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\gamma}\right]$$

由式（4），可取 N_1，使得

$$\sum_{i=N_1-1}^{\infty}a_i\left(\frac{i+1}{2}\right)^{\gamma}\leqslant\frac{1}{8},\quad n\geqslant N_1 \tag{8}$$

则 $n\geqslant N_1$ 时，有 $Ty_n\geqslant n/4$。于是 $TS\subset S$。再取 Y，$Z\in S$，则

$$\frac{1}{n}|Ty_n-Tz_n|\leqslant\sum_{i=N-1}^{n-2}a_i|y_{i+1}^{\gamma}-z_{i+1}^{\gamma}|+\frac{1}{n}\sum_{i=n}^{\infty}ia_{i-1}|y_i^{\gamma}-z_i^{\gamma}|=$$
$$\sum_{i=N-1}^{n-2}a_i(i+1)^{\gamma}\left|\left(\frac{y_{i+1}}{i+1}\right)^{\gamma}-\left(\frac{z_{i+1}}{i+1}\right)^{\gamma}\right|+\sum_{i=n}^{\infty}i^{\gamma+1}a_{i-1}\left|\left(\frac{y_i}{i}\right)^{\gamma}-\left(\frac{z_i}{i}\right)^{\gamma}\right|\leqslant$$
$$M\gamma\left[\sum_{i=N-1}^{n-2}a_i(i+1)^{\gamma}\left|\frac{y_{i+1}}{i+1}-\frac{z_{i+1}}{i+1}\right|+\sum_{i=n}^{\infty}i^{\gamma+1}a_{i-1}\left|\frac{y_i}{i}-\frac{z_i}{i}\right|\right] \tag{9}$$

再由（4）式，可取 N_2（$\geqslant N_1$），使当 $n\geqslant N_2$ 时有 $\sum_{i=N_2-1}^{\infty}a_i(i+1)^{\gamma}\leqslant\frac{1}{4M\gamma}$，代入（9）式，有

$$\frac{1}{n}|Ty_n-Tz_n|\leqslant M\gamma\left(\frac{1}{4M\gamma}+\frac{1}{4M\gamma}\right)\|Y-Z\|=\frac{1}{2}\|Y-Z\|$$

于是 $\|TY-TZ\|\leqslant\frac{1}{2}\|Y-Z\|$，$n\geqslant N_2$，从而 T 为压缩的。取 $N=\max\{N_1,\ N_2\}$ 由不动点定理，存在 $X=\{x_n\}$，$n\geqslant N$ 为 T 在 S 内的不动点，即 X 为方程（3）的解。再由式（6）易知 X 为无界的且非振动。存在性证毕，下证渐近性质。

从存在性的证明可知，我们可取空间的闭子集为

$$S=\{Y=\{y_n\}:(\alpha-\varepsilon)\leqslant y_n/n\leqslant\alpha,\quad n\geqslant N\} \tag{10}$$

这里 ε 为与 N 有关的可以任意小的正数，$\alpha\neq0$ 为由初始条件决定的常数。

在（7）式定义映射 T 时，将右端第一项改为 αn，即

$$Ty_n=\alpha n-n\sum_{i=N-1}^{n-2}a_iy_{i+1}^{\gamma}-\sum_{i=n}^{\infty}ia_{i-1}y_i^{\gamma} \tag{11}$$

则映射 T 的不动点为方程（3）的非振动解。类似可证 T 仍为 S 上的压缩映射，即是 T 在 S 上的不动点 X 存在。对这个解 X，由（10）式显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\alpha$，也就是 $x_n=(\alpha+o(1))n$。定理证完。

参考文献：

[1] Wong J S W. On the Generalized Emden—Fowler Equation [J]. SIAM Review, 1975, 17: 339—360.

[2] John W Hooker, William T Patula. A Second—Order Nonliner Difference Equation: Oscillation and Asymptotic Behavior [J]. J Math Anal Appl, 1983, 91: 9—29.

[3] 吴春青. 三阶有重根 Poincaré 差分方程解的渐近性质 [J]. 江苏石油化工学院学报, 2001, 13 (1): 48—50.

Nonoscillatory Solutions of Emden—Fowler Type Difference Equations

WU Chun—qing

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: We obtained the existence and asymptotic behavior of unbonded nonoscillatory solution of Emden—Fowler type difference equation by using fixed point theorem, this type of difference equation has wide applications.

Key words: Emden—Fowler difference equation; nonoscillatory solution; asymptotic behavior