文章编号：1005－8893（2002）03－0062－03

一类二级饱和反应模型研究*

沃松林
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：化学反应的反应速度虽然是浓度的函数，但常有一个最大值，也就是有一个饱和反应速度。运用了常微分方程定性理论和稳定性理论，分析了一类二级饱和反应模型。得到它的解的有界性、正平衡点的全局渐近稳定性和极限环的存在性。

关键词：有界性；全局渐近稳定性；极限环
中图分类号：Q 145.1　　　文献标识码：A

对于一个化学反应[1]：$A \rightarrow A_1$，其反应速度虽然是浓度的函数，但常有一个最大值，也就是有一个饱和反应速度，反应速度和浓度的关系为：$V=\dfrac{V_{\max}[A]^2}{K_m+[A]^2}$，称为二级饱和反应，这是吸附理论[2]中的Michaelis－Menten方程的一种形式，其中 V_m 为反应速度的最大值；$[A]$ 为反应物 A 的浓度；K_m 为Michaelis－Menten常数，它为达到最大反应速度一半时，反应物的浓度；这种饱和反应的方式记为：$A \xrightarrow{V_m} A_1$，文献[3]研究了一类一级饱和反应模型。

本文考虑的反应公式为：

$$C_0 \xrightarrow{k_1} C_1$$

$$C_1 \xrightarrow{k_2} P \text{（产品）}$$

$$C_1 + C_2 \xrightarrow{k_3} 2C_2$$

$$C_2 + E \xrightarrow{V_m} C_2E \text{（混合物）}$$

$$C_2E \longrightarrow E + Q \text{（产品）}$$

记 $[C_0]$，$[C_1]$，$[C_2]$ 分别为 C_0，C_1，C_2 的浓度，相应的数学模型为：

$$\begin{cases} \dfrac{d[C_1]}{dt} = k_1[C_0] - k_2[C_1] - k_3[C_1][C_2] \\ \dfrac{d[C_2]}{dt} = k_3[C_1][C_2] - \dfrac{V_m[C_2]^2}{K_m+[C_2]^2} \end{cases} \tag{S}$$

通过无量纲变换：$x=[C_1]$，$y=[C_2]$，$dt=\dfrac{(K_m+y^2)}{k_3}d\tau$，仍记 $d\tau$ 为 dt，则系统（S）记为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y^2+b)(\delta - Bx - xy) \triangleq P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y[x(y^2+b) - ay] \triangleq Q(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$b=K_m$，$a=\dfrac{K_m}{k_3}$，$\delta=\dfrac{k_1[C_0]}{k_3}$，$B=\dfrac{k_2}{k_3}$

显然：$b>0$，$a>0$，$\delta>0$，$B\geqslant 0$。$B=0$ 表示无产品 P 输出，$B>0$ 表示有产品 P 输出。本文讨论仅对 $B=0$ 情况，对 $B>0$ 的情况另文研究。根据实际意义，以下讨论都限制在区域 $\Omega=\{(x, y): x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 内。

在 $B=0$ 下，系统（1）为系统：

* 收稿日期：2002－02－25
基金项目：江苏石油化工学院科技基金资助
作者简介：沃松林（1964－），男，江苏丹阳人，副教授，主要从事生物数学和生物控制方面的研究。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(y^2+b)(\delta-xy)\triangleq P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=y[x(y^2+b)-ay]\triangleq Q(x,y)\end{cases} \tag{2}$$

1 主要结果及证明

对系统（2）而言：$y=0$ 为系统（2）的轨线；$x=0$ 为其无切线，当 t 增加时，系统（2）的轨线都是由左边穿向右边；在 Ω 内，系统（2）至多有一个奇点，且：①当 $\delta-a\geqslant0$ 时，系统（2）在 Ω 内无奇点。②当 $\delta-a<0$ 时，系统（2）在 Ω 内有唯一奇点 $M^*(x^*,y^*)$。

其中 $x^*=\dfrac{\delta}{y^*}$，$y^*=\sqrt{\dfrac{b\delta}{a-\delta}}$

经过简单计算可以得到[4]：

引理：当 $a>\delta$ 时，系统（2）的奇点 M^* 为焦点或结点，且：①当 $(2\delta-a)(a-\delta)\leqslant ab$ 时，M^* 为稳定的。②当 $(2\delta-a)(a-\delta)>ab$ 时，M^* 为不稳定的。

定理 1：①当 $a\leqslant\delta$ 时，系统（2）的一切正初值的正半轨线无界。②当 $a>\delta$ 时，系统（2）的一切正初值的正半轨线有界。

证明：①令：$V=x+y$，因为，当 $a\leqslant\delta$ 时，有：$V|_{(2)}=\delta(y^2+b)-ay^2=(\delta-a)y^2+b\delta>0$ 而 Ω 内又无系统（2）的平衡点。所以，系统（2）的一切正初值的正半轨线无界。

②当 $a>\delta$ 时，记：

$l_1=\{(x,y):xy=\delta\}$

$l_2=\{(x,y):x(y^2+b)-ay=0\}$

设 $(x(t),y(t))$ 为系统（2）以 (x_0,y_0) 为初值的轨线（$x_0>0$，$y_0>0$），由于 $y=0$ 为系统（2）的轨线；取 $x_N>\max\{x_0,x^*\}$，过 $N(x_N,0)$ 作直线 $x=x_N$ 交 l_1 于 $M\left(x_N,\dfrac{\delta}{x_N}\right)$，由解对初值的连续依赖性，总存在 $A(0,y_A)$，y_A 充分小，使系统（2）过 A 的轨线与直线 MN 相交于 $B(x_N,y_B)$ 且 (x_0,y_0) 其上方。过 $B(x_N,y_B)$ 作 $y=y_B$ 交 l_1 于 $B'(x_{B'},y_B)$，$x_{B'}=\dfrac{\delta}{y_B}$，由 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{BB'}>0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{BM}>0$。

所以，过 B 的轨线必交 l_1 于 $C(x_C,y_C)$，过 $C(x_C,y_C)$ 作 $x=x_C$，在它上取 $D(x_C,y_D)$，$y_D>\max\{y_0,y^*\}$；过 $D(x_C,y_D)$ 作直线 L：$x+y=x_C+y_D$，交 y 轴于 E，见图 1，则在闭曲线 $\Gamma^*=ABC\cup CD\cup DE\cup EA$ 上有：

①$(x_0,y_0)\in\operatorname{int}\Gamma^*$，$M^*\in\operatorname{int}\Gamma^*$

②ⅰ ABC 为系统的轨线；ⅱ在 CD 上：$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{\substack{CD\\(2)}}<0$；ⅲ在 DE 上：$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\substack{DE\\(2)}}=(\delta-a)y^2+b\delta<0$；ⅳ在 EA 上：$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{\substack{EA\\(2)}}>0$。

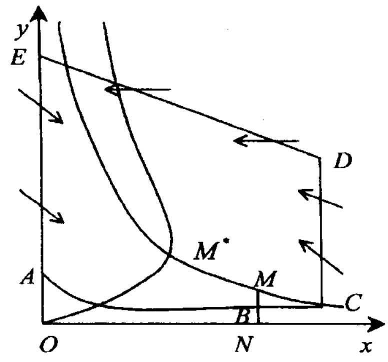

图 1 Γ^*上轨线图

所以，系统（2）的轨线在 Γ^* 上当 t 增加时，由 Γ^* 外穿向 Γ^* 的内部，而 $(x_0,y_0)\in\operatorname{int}\Gamma^*$，由 (x_0,y_0) 的任意性知：系统（2）的一切正初值的正半轨线有界。

若系统（2）有闭轨线 Γ，则它必为逆时针方向且包含 M^* 在其内部的闭轨线。设闭轨线 Γ 存在，它的最小正周期为 $T>0$。

由 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{(2)}+\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{(2)}=\delta(y^2+b)-ay^2=(a-\delta)(y^{*2}-y^2)$

等式两边沿 Γ 积分，则有：

$$\oint_\Gamma y^2 dt=y^{*2}T \tag{3}$$

由系统（2）：$\dfrac{1}{y^2+b}\dfrac{dx}{dt}=\delta-xy$，有：

$$\oint_\Gamma xy\,dt=\delta T-\iint_{\operatorname{int}\Gamma}\frac{2y}{(y^2+b)^2}dx\,dy \tag{4}$$

其中：$\operatorname{int}\Gamma$ 为闭轨线所围区域。

定理 2：当 $a>\delta$ 且 $(2\delta-a)(a-\delta)\leqslant ab$ 时，系统（2）在 Ω 之内不存在闭轨线。

证明：设系统（2）在 Ω 之内存在闭轨线，设最靠近 M^* 为 Γ，它的最小正周期为 $T>0$。由 $(2\delta-a)(a-\delta)\leqslant ab$ 知，M^* 为稳定的奇点，且 $-(y^{*2}+b)+(2x^*y^*-a)\leqslant0$。取 $B(x,y)=1/y$，

$\mathrm{div}[B(x,y)P(x,y), B(x,y)Q(x,y)] = -(y^2+b)+(2xy-a)$，由(3)式，(4)式知：

$$\oint_\Gamma \mathrm{div}[B(x,y)P(x,y), B(x,y)Q(x,y)]\,\mathrm{d}t = -\oint_\Gamma (y^2+b)\mathrm{d}t + \oint_\Gamma (2xy-a)\mathrm{d}t = [-(y^{*2}+b)+(2x^*y^*-a)]\,T - \iint_\Gamma \frac{4y}{(y^2+b)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0$$

所以，Γ为稳定极限环与M^*稳定矛盾。

从而：当 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$\leqslant ab$ 时，系统（2）在 Ω 之内不存在闭轨线。

推论：当 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$\leqslant ab$ 时，系统（2）的正平衡点 M^* 在 Ω 内全局渐近稳定。

定理3：当 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$>ab$ 时，系统（2）在内 Ω 存在极限环。

证明：由 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$>ab$ 知：M^*存在且不稳定；由定理1的证明中 Γ^* 的性质，Γ^*和 M^* 构成了 Poincaré 环域。由 Poincaré－Bandixson 环域定理知道[5]：系统（2）在 Ω 内至少存在一个外稳定环和一个内稳定环，它们可能重合。

2 结束语

由以上的定性分析可以看出，当参数满足条件 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$\leqslant ab$ 时，由系统（2）所描述的一类二级饱和反应模型模型，不论 C_1，C_2 浓度的初值在 Ω 中取何值，在经过充分长的时间后，两者的密度都分别稳定在一组定值附近；当参数满足条件 $a>\delta$且（$2\delta-a$）（$a-\delta$）$>ab$ 时，被食植物和食植动物的密度的初值在 Ω 中取何值，在经过充分长的时间后，这两者的密度都可能将发生周期性变化。

参考文献：

[1] 陈兰荪．生物动力学系统（上册）［M］．北京：中国科学院数学研究所，1987.4

[2] Hinshdwood C N. The Chemical Kinetics of the Bacterial Cell［M］. Oxford: Oxford at the Clarendon Press, 1947.

[3] 沃松林．一类一级饱和反应模型［J］．应用数学学报，1989，12（4）：440－448.

[4] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等．微分方程定性理论［M］．北京：科学出版社，1985.272－274.

[5] 叶彦谦．极限环论［M］．上海：上海科学技术出版社，1984.8－16.

The Study of a Two－order Saturated Reaction

WO Song－lin

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: The reaction velocity of chemical reaction is the function of chemical density, but has the maximum reaction velocity. That is saturated reaction. In this paper, we applied the qualitative and stability theory of ordinary differential equation and analysed a two－order saturated reaction system. We obtained the boundary of its positive semi－trajectory with positive initial values, the global asymptotic stability of its equilibrium, the existence of its limit cycles.

Key words: bounded; global asymptotic stability; limit cycle