文章编号：1005－8893（2002）04－0025－03

Gauss－Seidel 技巧在一个迭代法中的应用*

黄清龙
（江苏石油化工学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：讨论了 Gauss－Seidel 技巧在一个迭代法中的应用，获得了收敛性和收敛阶的结论。数值例子表明 Gauss－Seidel 技巧的应用使迭代过程收敛得更快。

关键词：代数方程；迭代法；Gauss－Seidel 技巧
中图分类号：O 241　　文献标识码：A

文献 [1] 给出了一个在无重根的情况下同时决定 n 次代数方程的 n 个根的 3 阶迭代解法，文献 [2] 讨论了它的一种加速方法，即用 Halley 迭代法对其进行修正，得到一个 5 阶收敛的新迭代法。本文将讨论 Gauss－Seidel 技巧在这个新的迭代法中的应用，证明使用 Gauss－Seidel 技巧后仍收敛且至少有 5 阶敛速，而且数值实例表明，使用 Gauss－Seidel 技巧后迭代过程收敛得更快。

1　主要结果及证明

设有 n 次代数方程

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=0 \tag{1}$$

其中 $r_i\neq r_j$（$i\neq j$）。

文献 [2] 建立的迭代公式为：

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\alpha_i^{(k)}}{1+\alpha_i^{(k)}\beta_i^{(k)}} \tag{2}$$

其中

$$\alpha_i^{(k)}=-\frac{f\left(x_i^{(k)}\right)}{f'\left(x_i^{(k)}\right)} \tag{3}$$

$$\beta_i^{(k)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}} \tag{4}$$

$$u_j^{(k)}=x_j^{(k)}+\frac{\alpha_j^{(k)}}{1+\frac{1}{2}\alpha_j^{(k)}f''\left(x_j^{(k)}\right)/f'\left(x_j^{(k)}\right)} \tag{5}$$

$x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）是方程（1）的 n 个根的初始近似值。

对（2）式应用 Gauss－Seidel 技巧，即将（2）式中的 $\beta_i^{(k)}$ 用 $\beta_i^{*(k)}$ 代替，得另一迭代公式

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\alpha_i^{(k)}}{1+\alpha_i^{(k)}\beta_i^{*(k)}} \tag{2*}$$

其中

$$\beta_i^{*(k)}=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k+1)}}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-u_j^{(k)}} \tag{4*}$$

$\alpha_i^{(k)}$，$u_j^{(k)}$ 仍由（3）式，（5）式给出。

为了证明（2）*式的收敛性和收敛阶，将（2）*式改写成

$$h_i^{(k+1)}=\frac{A_i^{(k)}}{1+A_i^{(k)}}h_i^{(k)} \tag{6}$$

其中

$$h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-r_i \tag{7}$$

$i=1, 2, \cdots, n$；$k=0, 1, 2, \cdots$。

$$A_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)(r_j-u_j^{(k+1)})}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-u_j^{(k+1)})}+$$

---

* 收稿日期：2002－09－10
基金项目：江苏省高校自然科学研究项目（02KJD110001）；江苏石油化工学院科技基金资助
作者简介：黄清龙（1963－），男，重庆忠县人，硕士，副教授，研究工作主要在应用数学和计算数学等方面。

$$\sum_{j=i+1}^{n}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)(r_j-u_j^{(k)})}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-u_j^{(k)})} \quad (8)$$

由Halley迭代法是3阶收敛不难得出：

引理1 设 $u_j^{(k)}$ 由（5）式确定，则存在与 j，k 无关的常数 c，δ，使当 $|x_j^{(k)}-r_j|\leqslant\delta$ 时 $|u_j^{(k)}-r_j|\leqslant c|x_j^{(k)}-r_j|^3$，$j=1,2,\cdots,n$；$k=0,1,2,\cdots$。记

$$d=\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}|r_i-r_j| \quad (9)$$

下列引理2显然成立。

引理2 存在正数 s 满足：$s\delta\geqslant d$，$s^2\geqslant cd^2$，$(s-1)(s-2)>2(n-1)$，其中 c，δ为引理1中确定的常数，n 是代数方程的次数。

下面定理及其证明中的 s，d，c，δ由引理1、引理2所确定。

定理 当迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1,2,\cdots,n$）满足 $|h_j^{(0)}|=|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$时由（2）*式产生的序列 $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$收敛于 r_i，且收敛阶至少为5。

证明 首先用数学归纳法证明当初值 $x_j^{(0)}$ 满足 $|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1,2,\cdots,n$）时对 $j=1,2,\cdots,n$ 均有$|h_j^{(1)}|\leqslant q|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$，其中 q 是某个小于1的正数。对 $j=1$，由于 $x_1^{(1)}$ 仍由（2）式确定，故由文献[2]的定理证明过程知$|h_1^{(1)}|\leqslant q|h_1^{(0)}|$，这里

$$q=\frac{p}{1-p} \quad (10)$$

而

$$p=\frac{n-1}{(s-1)(s-2)} \quad (11)$$

由引理2知：$p<\frac{1}{2}$，从而$0<q<1$。

如果假设$|h_j^{(1)}|\leqslant q|h_j^{(0)}|$对$j=1,2,\cdots,i-1$成立，因为

$$|u_j^{(1)}-r_j|\leqslant c|h_j^{(1)}|^3\leqslant cq^3\left(\frac{d}{s}\right)^3<\frac{d}{s},$$

$$|x_i^{(0)}-u_j^{(1)}|\geqslant|r_i-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|-|u_j^{(1)}-r_j|\geqslant\frac{s-1-q^3}{s}d,$$

$$|x_i^{(0)}-r_j|\geqslant|r_i-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant\frac{s-1}{s}d,$$

$$|x_i^{(0)}-u_j^{(0)}|\geqslant|r_i-r_j|-|u_j^{(0)}-r_i|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant\frac{s-2}{s}d,$$

所以由（8）式利用引理1、引理2得

$$|A_i^{(0)}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{|h_i^{(0)}|\cdot c|h_j^{(1)}|^3}{\frac{s-1}{s}d\cdot\frac{s-1-q^3}{s}d}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|h_i^{(0)}|\cdot c|h_j^{(0)}|^3}{\frac{s-1}{s}d\cdot\frac{s-2}{s}d}\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{cs^2q^3|h_i^{(0)}||h_j^{(0)}|^3}{(s-1)(s-1-q^3)d^2}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{cs^2|h_i^{(0)}|\cdot|h_j^{(0)}|^3}{(s-1)(s-2)d^2}\leqslant p<\frac{1}{2} \quad (12)$$

故有$|h_i^{(1)}|\leqslant\frac{p}{1-p}|h_i^{(0)}|=q|h_i^{(0)}|$。

由归纳法即知对 $j=1,2,\cdots,n$，均有 $|h_j^{(1)}|\leqslant q|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$。

现假设$|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1,2,\cdots,n$）则类似地可以证明对$j=1,2,\cdots,n$均有

$$|h_j^{(k+1)}|\leqslant q|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s} \quad (13)$$

再由归纳法即知对整数 $k\geqslant0$，（13）式总成立。利用（13）式得

$$|h_j^{(k)}|\leqslant q^k|h_j^{(0)}|\leqslant\left(\frac{d}{s}\right)q^k\to0\ (k\to\infty),$$

即 $x_j^{(k)}\to r_j$（$k\to\infty$）（$j=1,2,\cdots,n$）。

下面估计式（2）*的收敛阶。

在上面讨论收敛性时已证明了当$|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$时总有$|h_j^{(k+1)}|\leqslant q|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1,2,\cdots n$；$k=0,1,2,\cdots$）。

由此，与（12）式估计 $A_i^{(0)}$ 类似地讨论可得

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{cs^2q^3|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|^3}{(s-1)(s-1-q^3)d^2}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{cs^2|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|^3}{(s-1)(s-2)d^2} \quad (14)$$

所以若记$|h^{(k)}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|h_j^{(k)}|$，则

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{cs^2}{(s-1)d^2}\left[\frac{(i-1)q^3}{s-1-q^3}+\frac{n-i}{s-2}\right]|h^{(k)}|^4 \quad (15)$$

且由（15）式结合引理1、引理2得，$|A_i^{(k)}|<\frac{1}{2}$。

记 $c^*=\frac{2cs^2}{(s-1)d^2}\left[\frac{(i-1)q^3}{s-1-q^3}+\frac{n-i}{s-2}\right]$，则 $|h_i^{(k+1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(k)}|}{1-|A_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|\leqslant c^*|h^{(k)}|^5$，所以迭代式（2）*至少具有5阶敛速。

2 数值例子

为了便于比较，我们仍然求解文献 [2] 算例中的方程 $32x^3-56x^2+24x-3=0$，分别利用文献 [1，2] 中的迭代式和本文的 (2)* 式求解，计算结果见表 1，从中可见本文的 (2)* 式是收敛得最快的。

表 1 求解方程 $32x^3-56x^2+24x-3=0$ 的计算结果

迭代公式	迭代次数	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
文献 [1] 的迭代式	0	0	0.5	1.0
	1	0.200 000 000 000	0.375 000 000 000	1.176 470 588 235
	2	0.243 808 087 597	0.323 805 689 748	1.183 011 463 275
	3	0.249 955 665 119	0.317 035 707 337	1.183 012 701 892
	4	0.249 999 999 979	0.316 987 298 131	1.183 012 701 892
	5	0.250 000 000 000	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892
文献 [2] 的迭代式	0	0	0.5	1.0
	1	0.231 729 055 258	0.346 042 471 043	1.183 941 605 839
	2	0.249 920 728 625	0.317 052 319 337	1.183 012 700 566
	3	0.250 000 000 000	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892
本文的 (2)* 式	0	0	0.5	1.0
	1	0.231 729 055 259	0.321 353 663 828	1.183 054 361 715
	2	0.249 999 345 293	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892
	3	0.250 000 000 000	0.316 987 298 108	1.183 012 701 892

参考文献：

[1] Ehrlich L W. A Modified Newton Method for Polynomials [J]. Comm ACM, 1967, 10: 107— 108.

[2] 黄清龙. 一个代数方程迭代解法的加速方法 [J]. 江苏石油化工学院学报，2002，14 (3)：59— 61.

[3] 王能超. 数值分析简明教程 [M]. 北京：高等教育出版社，1984.

[4] 何樵登. 地震波理论 [M]. 北京：地质出版社，1988.

The Application of Gauss— Seidel Technique in an Iterative Method

HUANG Qing—long

(Department of Information Science, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

Abstract: This paper discusses the application of Gauss—Seidel technique in an iterative method. The convergence and convergence order are obtained. Numerical results show that the application can speed up the original process.

Key words: algebraic equation; iterative method; Gauss—Seidel technique