

文章编号: 1005—8893 (2002) 04—0058—03

# 高精度定点数平方根汇编子程序的实现原理<sup>\*</sup>

张小鸣, 王正洪, 朱正伟

(江苏石油化工学院 计算机科学与工程系, 江苏 常州 213016)

摘要: 在 8/16 位单片机或 32 位定点 DSP 实时测控系统中, 汇编应用程序仍占主导地位。介绍一种用定点实数格式实现平方根汇编子程序的方法, 并通过与 3 字节浮点数平方根汇编子程序运算结果比较发现: 前者比后者的精度更高, 在保持精度不变时, 开平方根数的范围更大。

关键词: 平方根; 定点数; 定点 CPU; 数字信号处理; 电力监测

中图分类号: TP 313; TB 115

文献标识码: A

在嵌入式 CPU 电力变送器交流采样中, 必须调用平方根汇编子程序, 例如用 A/D 转换器在一个工频周期对交流电压和电流交流采样  $n$  个值, 则电压、电流的有效值公式为:

$$U = K_u \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} u(j)^2}$$

式中  $K_u$  是与一次、二次互感器变比及 A/D 分辨率有关的标度变换系数。还可以用傅立叶级数算出各次谐波幅值  $H_{km}$  ( $k=1, 3, 5, \dots$ ) 的实部  $R_{km}$  和虚部  $V_{km}$ , 则

$$H_{km} = \sqrt{R_{km}^2 + V_{km}^2}$$

由此可见, 除互感器测量精度和 A/D 转换器分辨率外, 平方根运算等数字信号处理精度对测量精度起着决定性的作用。本文介绍一种用混合定点数格式编制平方根子程序设计原理及实现方法, 实验证明运算精度完全满足使用定点 CPU 的电量变送器<sup>[1]</sup>等应用。

## 1 混合定点数与平方根牛顿迭代法

实数  $A$  的开平方数 $\sqrt{A}$ 牛顿迭代法计算的迭代公式为:

$$X_n = (X_{n-1} + A/X_{n-1}) / 2$$

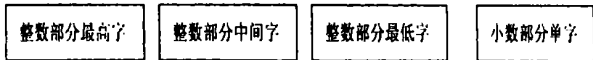
迭代结束条件:  $|X_n - X_{n-1}| < \epsilon$ , 其中  $\epsilon$  是

人为规定的迭代精度。

用定点 CPU 汇编指令实现平方根牛顿迭代法, 必须解决 3 个问题: ①定点实数的表示格式; ②用定点 CPU 除法指令实现“ $A/X_{n-1}$ ”运算时, 怎样才能保证精度? ③迭代精度 (如何用定点实数格式表示)?

### 1.1 定点实数格式

定点 CPU 只能表示定点数, 通常是整数或小数, 小数点实际上不存在。例如 16 位定点 CPU 表示的无符号整数范围是 0~65 535; 表示的有符号整数范围是 -32 768 ~ +32 767。如果人为规定小数点放在任何字节的边界上, 就可表示带有整数部分和小数部分的定点实数。从平方根牛顿迭代法公式出发, 本文要求迭代计算结果数据格式有 16 位整数和 16 位小数, 即 32 位定点实数, 则由除法指令的被除数和除数关系可推得: 被开平方根数  $A$  必须为 64 位定点实数格式见图 1。



默认小数点位置, 实际不存在

图 1 被开平方根数数据格式

\* 收稿日期: 2002—07—06

作者简介: 张小鸣 (1958—), 男, 安徽合肥人, 副教授。

## 1.2 定点实数相除的技术

### 1.2.1 定点 CPU 除法指令的溢出问题

弄清楚定点 CPU 除法指令的溢出问题, 是实现定点实数相除得到正确商的基础。定点 CPU 除法指令的特点是被除数位数总是比除数的多一倍, 仔细分析可发现: 定点 CPU 除法指令存在 2 种运算溢出: 上溢出和下溢出, 上溢容易理解, 例如 32 位除 16 位除法指令, 商为 16 位, 余数为 16 位, 当商数超过 16 位二进制数能表示的最大数就发生上溢, 但下溢不直观, 较难理解, 这正是带小数部分定点实数用定点除法指令相除的难点所在。

上溢条件: 被除数的高一半数值大于除数时, 发生上溢。

下溢条件: 被除数的高一半数值为 0 而低一半数值小于除数时, 商总为 0, 即发生下溢。

### 1.2.2 定点 CPU 除法指令防溢出措施

防上溢措施: 当比较被除数高一半数值大于除数时, 先将被除数缩小  $2n$  倍, 使被除数的高一半数值小于除数, 再执行除法指令, 得到商之后, 再将商放大  $2n$  倍。

防下溢措施: 当比较被除数的高一半数值为 0 而低一半数值小于除数时, 先将被除数放大  $2n$  倍, 使被除数的低一半数值不小于除数, 再执行除法指令, 得到商之后, 再将商缩小  $2n$  倍。

平方根牛顿迭代法要完成小定点实数到大定点实数的开平方根, 在运算 “ $A/X_{n-1}$ ” 时, 不可避免地会遇到除法指令的溢出问题, 如果正确掌握除法指令的防上下溢处理技术, 就能编制出实用高精度的定点实数除法子程序。

### 1.3 平方根牛顿迭代法初值的计算

为简单起见, 通常牛顿迭代初值取  $X_0 = A/4$ , 虽然可通过对  $A$  右移 2 次计算出 “ $A/4$ ”, 但从迭代公式计算 “ $A/X_{n-1}$ ” 的  $X_{n-1}$  数据格式相统一角度出发, 4 也应表示为 32 位数据格式, 其中高 16 位是整数部分, 低 16 位为小数部分, 见图 2。

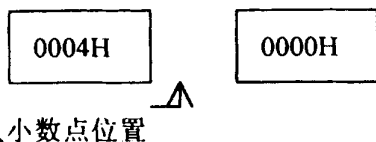


图 2 迭代值数据格式

比较图 1 和图 2 的  $A$  与 4 的数据格式可发现:

4 的数据格式小数部分已放大  $2^8$  倍, 即左移 8 位。(因为根据定点 CPU 除法规则: 被除数整数部分和小数部分长度都应是除数整数和小数部分的 2 倍, 才能产生正确的商)。

### 1.4 平方根牛顿迭代法 $A/X_{n-1}$ 的计算

被开平方根数  $A$  代入牛顿迭代法除式 “ $A/X_{n-1}$ ” 计算商时, 关键要防止除法的上下溢, 分 2 种情况判断:

(1) 被开平方根数  $A$  的整数部分最高 32 位为 0 而最低 16 位不为零时, 根据除法下溢发生条件, 有可能出现被除数小于除数的情况, 为了防止下溢, 当  $A$  整数部分  $\leq 00000000FFFFH$  时,  $A$  一律左移 16 位作为 “ $A/X_{n-1}$ ” 的被除数  $A$ , 则被除数高 32 位  $\leq 0000FFFFH$ , 总是  $<$  除数  $000040000H$  或其它除数  $X_{n-1}$ , (即只要除数整数部分 16 位不为零, 则 32 位除数总归大于被除数高 32 位), 因此不会发生上溢。

(2) 被开平方根数  $A$  的整数部分最高 32 位不为 0, 且小于最大可开平方根数, 例如  $A$  整数部分 48 位上限定为  $\leq 000001000000H$ , 可见  $A$  的整数部分最高 32 位 =  $00000100H$ , 总是  $<$  除数  $000040000H$  或其它除数  $X_{n-1}$  (即只要除数整数部分 16 位不为零, 则 32 位除数总归大于被除数高 32 位),  $A$  直接代入牛顿迭代法除式 “ $A/X_{n-1}$ ” 计算商不会发生上溢。

### 1.5 牛顿迭代法迭代精度 $\epsilon$ 的定点表示法

由图 2 知,  $X_n$  和  $X_{n-1}$  都是 32 位定点实数,  $|X_n - X_{n-1}|$  的最小差值为  $00000001H$ , 即整数部分为 0, 小数部分为  $0001H = 2^{-16} = 0.000\ 015$ , 可见取  $\epsilon = 00000001H$ , 对于绝大多数工程计算来说, 迭代精度已足够高。

### 1.6 牛顿迭代终值的调整

在计算牛顿迭代法除式 “ $A/X_{n-1}$ ” 之前, 被除数和除数经过放大  $2^{16}$  或  $2^8$  倍处理, 则产生的与商相同数据格式的迭代终值要缩小  $2^{16}$  或  $2^8$  倍, 即右移 16 位或 8 位, 才能得到包含高 16 位整数和低 16 位小数的正确迭代终值。

## 2 实验结果

为了验证本文编制的平方根汇编子程序的计算

精度, 特用 MCS96 单片机的 3 字节浮点数平方根子程序 FSQR3<sup>[2]</sup> 和按本文原理编制的 TMS320F240 汇编指令<sup>[3]</sup> 定点数平方根子程序 DSQR 进行运算比较, 实验结果如表 1 所示。

表 1 平方根子程序计算结果记录表

被平方根数	FSQR3 计算	DSQR 计算	计算器计算
2	1. 414 18	1. 414 19	1. 414 21
3	1. 732 02	1. 732 04	1. 732 05
4. 7	2. 167 90	2. 167 93	2. 167 94
5. 7	2. 387 45	2. 387 46	2. 387 46
10. 7	3. 271 05	3. 271 07	3. 271 08
1 000. 7	31. 633 78	31. 633 83	31. 633 84
10 000. 7	100. 001 95	100. 003 49	100. 003 49
32 768	181. 015 62	181. 019 33	181. 019 33
32 769	溢出	181. 022 09	181. 022 09
65 535	溢出	255. 998 03	255. 998 04
523 264	溢出	732. 367 18	723. 369 89
16 777 216	溢出	4 096	4 096

实验发现: 被开平方根数在大于 10 000 时, 本文编制的定点数平方根子程序 DSQR 计算精度明显优于 3 字节浮点数平方根子程序 FSQR3, 总体精度可达到  $1.5 \times 10^{-5}$ , 而且更适合定点 CPU 直接数字处理 A/D 转换值, 处理速度更快。

### 3 基于 TMS320F240 的应用<sup>[4]</sup>

采用 TMS320F240 定点 DSP 芯片, 构成的电量变送器和数字式保护装置如图 3 所示。TMS320F240 内嵌的 10 位 A/D 转换器交流采样电压和电流信号, 再利用本文编制的平方根子程序, 就能算出电气参量交流信号的幅值和有效值。

实践表明: 国内流行的 8 位或 16 位单片机基本上都是定点 CPU, 由于价格非常便宜, 广泛应用于工业监测监控, 家庭智能化, 智能仪表, 数字

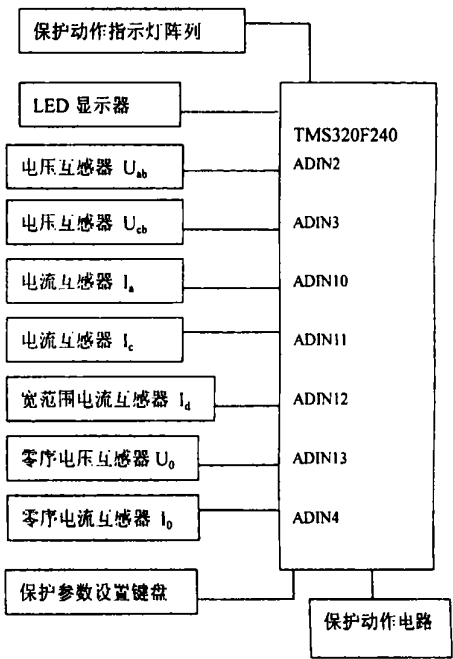


图 3 高压开关数字保护与监测装置框图

处理算法的研究是推动定点 CPU 向智能化领域发展的重要因素, 但愿本文在这方面有所裨益。

#### 参考文献:

[ 1 ] 张小鸣. KGD4 型电力参数变送器 [ J ] . 煤矿自动化, 1997, 增刊 (85): 88—91.  
 [ 2 ] 涂时亮. 单片微机 MCS—96/98 实用子程序 [ M ] . 上海: 复旦大学出版社, 1991. 135—138.  
 [ 3 ] Texas Instruments Incorporated. TMS320C1X/C2X/C2XX/C5X Assembly Language Tools User's Guide [ M ] . Houston: Champion Press, 1995.  
 [ 4 ] 张小鸣, 马正华. DSP 信号处理器的特点和应用方向 [ J ] . 江苏石油化工学院学报, 2001, 13 (3): 53—55.

## The Programming Principle of the High Accuracy Fixed—point Number Square Root Assembly Subroutine

ZHANG Xiao—ming, WANG Zheng—hong, ZHU Zheng—wei

(Department of Computer Science and Technology, Jiangsu Institute of Petrochemical Technology, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** In real time measurement control sysytem of 8—16 bits single chip microcomputer or 32 bits DSP, assembly application progorm still dominates. This paper introduces a method that implements the square root assembly subroutine (the former) with the fixed—point number format. By comparing with the calculating results of 3 bytes float—point number square root assembly subroutine (the latter), it was found that the former's calculating accuracy is higher than the latter's and the range of the square root numbers is wider in keeping accuracy constant.

**Key words:** squareroot; fixed—point number; fixed—point CPU; DSP; electric power monitoring