第 15 卷第 1 期　　江 苏 工 业 学 院 学 报　　Vol. 15 No. 1
2003 年 3 月　　JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Mar. 2003

文章编号：1005－8893（2003）01－0047－03

一类线性过程中的分布函数的收敛速度*

阮宏顺
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：考虑线性过程：$X(n)=\sum_{i=0}^{\infty}\delta(i)Z(n-i)$，在如下条件下：①$Z(n)$为 i. i. d. r. v′s，且 $E|Z(n)|<\infty$；②$Z(n)$的分布函数 F 具有有界密度；③参数 $\delta(i)$满足$|\delta(i)|<g(i)$，其中函数 g 满足$\sum_{i=1}^{\infty}ig(i)<\infty$，我们给出了 $\sup_{x\in R}|F(x)-F_{V_m}(x)|\to 0$ 的速度为$(g(h(m)))^{1/2}$，在相同的条件下，比原速度$(mg(h(m)))^{1/2}$快。
关键词：线性过程；分布函数；收敛速度
中图分类号：O 211　　　文献标识码：A

本文涉及到一类线性过程：

$$X(n)=\sum_{i=0}^{\infty}\delta(i)Z(n-i)\tag{1}$$

其中参数 $\delta(i)$满足适当的条件，$Z(n)$独立同分布，其方差不一定有限．如便于观测的时间序列(如股票价格的变化，电话噪音等）即为该过程的一个重要分支。

我们将研究$\sum_{i=0}^{h(m)}\delta(i)Z(n-i)$（$n=1,2,\cdots,m$）的分布函数的收敛渐近性（$h(x)$的定义见下文）。对于独立同分布（i. i. d）情形，经验分布函数的收敛速度及其极限分布已经得到了广泛的研究，Chung[2]、Smirnov[3] 各自证明了经验分布函数一致收敛的重对数律，而文献 [4] 中讨论了该过程中核估计的强一致相合性。

1　预备知识

本文的所有结果都是在类似的条件下取得的，为避免重复，先给出下面条件：

C1．设 $Z(n)$为 i. i. d. r. v′s，且 $E|Z(n)|<+\infty$；

C2．$X(n)$的分布函数 F 具有有界密度；

C3．参数$|\delta(i)|\leqslant g(i)$，其中实值函数 $g:N\to N$，且$\sum_{i=1}^{\infty}ig(i)<\infty$；

C4．参数 $\delta(i)$满足：$|\delta(i)|<g(i)\equiv c\rho^{i}$，$0<\rho<1$，$c>0$。（此处或下文所出现的正常数 c 不一定相同）。

因为$E\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\delta(i)Z(n-i)|\right)\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}g(i)E|Z(0)|<\infty$，在条件 C1、C2、C3 或 C1、C2、C4 下，在式（1）中的无穷和以概率 1 地绝对收敛。于是，对于整数 k，j，（$X(1)$，…，$X(k)$）的联合分布与（$X(1+j)$，…，$X(k+j)$）的联合分布相同，因此线性过程 $X(n)$几乎处处存在，且是严平稳的。

定义整值非降函数 $h:N\to N$，当 $m\to\infty$时，$h(m)\to\infty$，对于充分大的 m，有 $h(m)<m$，且$\sum_{i=1}^{\infty}ig(h(m)+i)/g(h(m))=O(1)$，记

$$\begin{aligned}V_m(n)&=\sum_{i=0}^{h(m)-1}\delta(i)Z(n-i),\\ &\quad n=1,2,\cdots,m\\ W_m(n)&=\sum_{i=h(m)}^{\infty}\delta(i)Z(n-i),\\ &\quad n=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{2}$$

显然，对于所有的 m 及 $n=1,2,\cdots,m$，

* 收稿日期：2002－10－10
基金项目：江苏省高校自然科学研究项目（02KJD110001）；江苏工业学院科技基金资助
作者简介：阮宏顺（1955－），男，安徽安庆人，副教授，硕士，主要从事概率极限理论研究。

有

$X(n) = V_m(n) + W_m(n)$。

现考察随机变量组:

$V_1(1)$

$V_2(1)\ V_2(2)$

……

$V_M(1)\ V_M(2)\ \cdots V_M(M)$

$M=1, 2, \cdots m\ (m\in N)$

每一行包含了一组同分布的随机变量。记 $F_{V_M}(x)=P\{V_M(1)\leqslant x\}$ 为第 M 行随机变量的分布函数。另外,对于每个 M,当 $|i-j|\geqslant h(M)$ 时,$V_M(i)$ 与 $V_M(j)$ 相互独立。因此集合,

$S_M^k=\{V_M(k), V_M(k+h(M)), \cdots, V_M(k+l_M^k h(M))\}$,$k=1, 2, \cdots, h(M)$

中的随机变量相互独立,且有

$\bigcap_k S_M^k=\Theta$(Θ 为空集)

$\bigcup_k S_M^k=\{V_M(i);\ i=1, \cdots, M\}$

其中常数 $l_M^k=[M/h(M)]$ 或 $[M/h(M)]-1$,$[x]$ 表示 x 的整数部分。

2 主要结果及证明

引理 对于式(2)中的 $W_m(n)$ 和 h,在条件 C1 和 C3 下,存在常数 $c>0$,对于所有的 $n\leqslant m$,有

$$|W_m(n)|\leqslant cZ_n g(h(m))\quad \text{a. s.}\qquad (3)$$

其中$Z_n=$

$$\max\left\{|Z(n-h(m))|, \sup_{i\geqslant 1}\frac{|Z(n-h(m)-i)|}{i}\right\}。$$

证明:由于 $W_m=\sum_{i=h(m)}^{\infty}\delta(i)Z(n-i)=$

$\sum_{i=0}^{\infty}\delta(i+h(m))Z(n-h(m)-i)=$

$\delta(h(m))Z(n-h(m))+$

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Z(m-h(m)-i)}{i}\cdot i\,\delta(n-h(m))$,

得$|W_m|\leqslant\delta(h(m))\{|Z(n-h(m)|+$

$\sup_{i\geqslant 1}\frac{|Z(n-h(m)-i|}{i}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\,\delta(i+h(m))}{\delta(h(m))}\}\leqslant$

$\delta(h(m))\max\{|Z(n-h(m)|,$

$\sup_{i\geqslant 1}\frac{|Z(n-h(m)-i|}{i}\}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{\infty}i\,\delta(i+h(m))}{\delta(h(m))}\right)$,

而$\sum_{i=1}^{\infty}ig(h(m)+i)/g(h(m))=O(1)$,故证毕。

定理 若满足条件 C1, C2, C3,则

$$\sup_{x\in R}|F(x)-F_{V_m}(x)|=O((g(h(m)))^{1/2})\qquad (4)$$

其中 F,F_{V_m} 分别为 $X(n)$,$V_m(n)$ 的分布函数。

证明:为方便起见,记 $T_m=\frac{1}{c(g(h(m)))^{\alpha}}$,由引理 1 得

$F_{V_m}(x)=P\{X(n)\leqslant x-W_m(n)\}\leqslant$

$P\{X(n)\leqslant x+cZ_n g(h(m))\}=$

$P\{X(n)\leqslant x+cZ_n g(h(m)), Z_n\leqslant T_m\}+$

$P\{X(n)\leqslant x+cZ_n g(h(m)), Z_n>T_m\}\leqslant$

$P\{X(n)\leqslant x+(g(h(m)))^{1-\alpha}\}+P\{Z_n>T_m\}$

$$(5)$$

由于

$P\{Z_n/T_m>1\}\leqslant P\{|Z(n-h(m))|>T_m\}+$

$\sum_{i=1}^{\infty}P\{|Z(n-g(m)-i)|>iT_m\}=$

$$P\{|Z(0)|>T_m\}+\sum_{i=1}^{\infty}P\{|Z(0)|>iT_m\}\qquad (6)$$

而

$\sum_{i=1}^{\infty}P\{|Z(0)|>iT_m\}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{iT_m}^{\infty}dG(x)=$

$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\int_{kT_m}^{(k+1)T_m}dG(x)=\sum_{i=1}^{\infty}i\int_{iT_m}^{(i+1)T_m}dG(x)\leqslant$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{iT_m}^{(i+1)T_m}(x/T_m)dG(x)\leqslant c/T_m\qquad (7)$$

其中 $G(x)$ 为 $Z(0)$ 的分布函数。由式(5)~式(7)得

$F_{V_m}(x)\leqslant F(x+(g(h(m)))^{1-\alpha})+$

$$c(g(h(m)))^{\alpha}\qquad (8)$$

又

$F_{V_m}(x)=P\{V_m(n)\leqslant x\}=$

$P\{Z(n)\leqslant x-W_m(n)\}\geqslant$

$P\{Z(n)\leqslant x-cZ_n g(h(m))\}\geqslant$

$P\{Z(n)\leqslant x-cZ_n g(h(m)), Z_n\leqslant T_m\}\geqslant$

$P\{Z(n)\leqslant x-(g(h(m)))^{1-\alpha}, Z_n\leqslant T_m\}=$

$P\{Z(n)\leqslant x-(g(h(m)))^{1-\alpha}\}-$

$P\{Z(n)\leqslant x-(g(h(m)))^{1-\alpha}, Z_m>T_m\}\geqslant$

$P\{Z(n)\leqslant x-(g(h(m)))^{1-\alpha}\}-P\{Z_n>T_m\}$

从而有

$F_{V_m}(x)\geqslant F(x-(g(h(m)))^{1-\alpha})-$

$$c(g(h(m)))^{\alpha}\qquad (9)$$

由式(8),式(9)及 F 具有有界密度函数得

$$\sup_{x\in R}|F(x)-F_{V_m}(x)|=$$
$$O(\max\{(g(h(m)))^{1-\alpha},(g(h(m)))^{\alpha}\})$$

取 $\alpha=1/2$ 时，其收敛速度为 $O((g(h(m)))^{1/2})$，证毕。

参考文献：

[1] Hesses C H. Rates of Convergence for the Empirical Distribution Function and the Empirical Characteristic Function of a Broad Class of Linear Processes [J]. J Mult Anal, 1990, 35: 186—220.

[2] Chung K L. An Estimate Concerning the Kolmogolov Limit Distribution [J]. Trans Amer Math Soc, 1949, 67: 36—50.

[3] Smirnov N V. Approximate Laws of Distribution Random Varaiabies from Empirical Data [J]. Uspehki Mat Nauk, 1944, 10: 179—206.

[4] 阮宏顺，许波．线性过程中核估计的强一致相合性 [J]．江苏石油化工学院学报，1998，10（1）：38—40.

Rate of Convergence for the Distribution Function of a Broad Class of Linear Processes

RUAN Hong—shun

（Department of Information and Science, Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213016, China）

Abstract: This paper dealt with uniform rate of convergence for a broad class of stationary linear processes: $X(n)=\sum_{i=0}^{\infty}\delta(i)Z(n-i)$ was considered under the condition that ①$Z(n)$ ($n=1, 2, \cdots$) is i. i. d. r. v′s with a finite first absolute moment, ②the distribution function F of $X(n)$ bounded density, and ③the parameters $\delta(i)$ were bounded in absolute value by some function g which satisfies $\sum_{i=1}^{\infty} ig(i)<\infty$. It was proved that the distribution function $F_{V_m}(x)$ converged to $F(x)$, uniformly in x, at a rate $O((g(h(m)))^{1/2})$ a. s. which was faster than that of [1] on the same condition.

Key words: linear process; distribution function; rate of convergence