

文章编号: 1005-8893(2003)02-0053-04

# 一个静电场问题的数值计算<sup>\*</sup>

江兴方

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

**摘要:** 将计算机引入到物理教学中, 对一个静电场具体问题数值计算, 求出各点的电势, 绘出电势曲线, 找出极值的位置, 进而说明数字化技术引入物理教学对物理教学现代化起到推动作用。

**关键词:** 静电场; 数值计算; 数字化技术

**中图分类号:** O 41

**文献标识码:** A

物理教学的改革不仅包括教学内容的现代化、教学手段的现代化, 还包括教学思想和教学观念的现代化<sup>[1]</sup>。将计算机引入到物理教学中, 不仅能深入细致地看清楚物理现象和规律, 而且可以让同学们将学到的计算机知识用到物理学习上来。使物理教学的内容更为具体, 更为生动, 更为精确, 从而提高学习的兴趣。

## 1 问题的提出

利用计算机计算静电场中的电场强度和电势, 并用具体的数值和直观的图形表示出来, 对于学习静电场起到重要作用。

**问题:** 半径为  $2R$  的均匀带电球, 电荷的体密度为  $\rho$ , 球心为  $O_1$ , 设想在球内有一半半径为  $R$  的球形空腔, 球心为  $O_2$ ,  $O_1O_2 = R$ , 如图 1 所示,

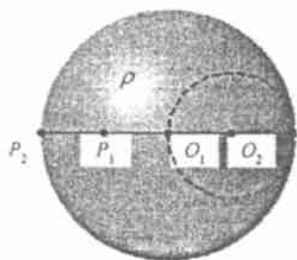


图 1 静电场问题

$P_1$  和  $P_2$  在  $O_1$  和  $O_2$  的连线的延长线上, 且

$P_1O_1 = R$ ,  $P_2O_1 = 2R$ 。根据叠加原理求  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  4 点电势的大小。

利用高斯定理, 不难求出以体电荷密度  $\rho$  (不妨假定  $\rho > 0$ ) 的带电球, 在其球外 ( $r > R$ ) 的电场强度<sup>[2]</sup> 为  $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$ , 方向由球心沿径向向外; 在球内 ( $r < R$ ) 的电场强度为  $\frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ , 方向由球心沿径向向外。

球外 ( $r > R$ ) 电势为  $\int_r^\infty \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$ ; 球内 ( $r < R$ ) 电势为  $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$ 。因此可以将该问题看成是半径为  $2R$  的体电荷密度为  $\rho$  的球与半径为  $R$ , 体电荷密度为  $-\rho$  的球在右边相切而成, 因此  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $P_1$ 、 $P_2$  4 点的电场强度与电势分别为:

$$E_{O1} = 0 + \frac{\rho}{3\epsilon_0} R = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}, \text{ 方向向右;}$$

$$E_{O2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} + 0 = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}, \text{ 方向向右;}$$

$$E_{P1} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R}{12\epsilon_0} = \frac{\rho R}{4\epsilon_0}, \text{ 方向向左;}$$

$$E_{P2} = \frac{2\rho R}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R}{27\epsilon_0} = \frac{17\rho R}{27\epsilon_0}, \text{ 方向向左;}$$

$$u_{O1} = \left[ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(2R)^2}{2} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(2R)^2}{2} \right] - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{5\rho R^2}{3\epsilon_0},$$

$$u_{O2} = \left[ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{4R^2 - R^2}{2} + \frac{\rho(2R)^2}{3\epsilon_0} \right] + \left[ \frac{-\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \right] =$$

\* 收稿日期: 2003-05-26

作者简介: 江兴方 (1963-), 男, 江苏常州人, 副教授, 主要从事物理教学, 物理信息技术的研究和应用。

$$\frac{4\rho R^2}{3\epsilon_0},$$

$$u_{P1} = \left[ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{4R^2 - R^2}{2} + \frac{\rho(2R)^2}{3\epsilon_0} \right] + \left[ -\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 \cdot 2R} \right] = \frac{5\rho R^2}{3\epsilon_0},$$

$$u_{P2} = \frac{\rho(2R)^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 \cdot 3R} = \frac{11\rho R^2}{9\epsilon_0}.$$

## 2 数值计算方法

利用计算机可以计算出问题中各点的场强、电势, 以及比较其周围场点的场强和电势, 并发现其中的规律。下面全面介绍大球内各点电势的计算方法。

(1) 在 Multimedia ToolBook 界面<sup>[3 4]</sup>上选择可推按钮工具, 画出两个按钮, 按钮上显示“任意点电势”和“各点电势”;

(2) 利用域工具, 画出 2 个可填域, 分别取名为“field11”、“field12”用于用户输入半径  $r$  和角度  $\theta$ ;

(3) 利用域工具, 画出 5 个域, 其中有 2 个域是文本显示域, 分别显示“ $r=$ ”、“ $\theta=$ ”, 2 个域用于显示计算结果, 分别取名为“field1”、“field2”, 以滚动栏形式出现, 还有一个域, 取名为“field90”用于显示提示;

(4) 对“任意点电势”和“各点电势”两个按钮分别键入计算大球内各点的电势的程序。注意: 由于该静电场问题具有对于  $O_1O_2$  轴旋转对称性, 故过  $O_1O_2$  轴的平面切割图 1 得到的图形都是等价的, 因此在大球内取一点  $P(r, \theta)$ , 如图 2 所示, 极坐标的原点取在  $O_1$  点,  $P$  点距离  $O_1$  为  $r$ , 距离  $O_2$  为  $\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}$ 。

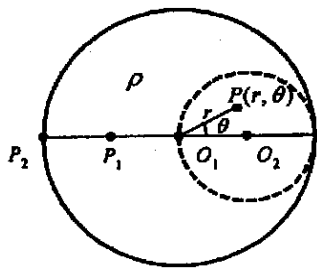


图 2 数值计算用图

当满足  $\cos\theta > \frac{r}{2R}$  时,  $P$  点位于小球内, 则

$$u_P = \frac{\rho(2R)^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (4R^2 - r^2) - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (2Rr\cos\theta - r^2).$$

当满足  $\cos\theta < \frac{r}{2R}$  时,  $P$  点位于大球内而在小

球外, 则

$$u_P = \frac{\rho(2R)^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (4R^2 - r^2) - \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta}}.$$

为了不失一般性, 同时为了计算方便, 假定

$R=1$ , 并假定常数  $\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}=1$  个单位, 设大球内一点  $P(r, \theta)$  的电势用“ $u$ ”表示, 图 3 中“任意点电势”程序:

to handle buttonclick

$r = \text{text of field field11}$

$s = (\text{text of field field12}) * 2 * \text{PI} / 360$

if ( $r=0$ )

$u=5$

else

if ( $r^2 + 1 - 2 * r * \cos(s) > 0$ )

$u=4$

else

if ( $\cos(s) > 0.5 * r$ )

$u = 6 - r^2 / 2 - 1 - 0.5 * (2 * r * \cos(s) - r^2)$

else

$u = 6 - r^2 / 2 - 1 / (\text{sqrt}(r^2 + 1 - 2 * r * \cos(s)))$

end

end

end

text of field field1 = “ $u=$ ” &  $u$

end

“各点电势”程序:

to handle buttonclick

textline 1 of text of field field2 = “ $r=$ ” & 0 & “,  $u=$ ” & 5

step  $i$  from 1 to 200

step  $j$  from (text of field field12) to (text of field field12)

$r = i / 100; s = j * \text{PI} / 180$

if ( $r^2 + 1 - 2 * r * \cos(s) > 0$ )

$u=4$

else

if ( $\cos(s) > 0.5 * r$ )

$u = 5 - r^2 / 2 - 0.5 * (2 * r * \cos(s) - r^2)$

else

$u = 6 - r^2 / 2 - 1 / (\text{sqrt}(r^2 + 1 - 2 * r * \cos(s)))$

```
end
end
textline i+1 of text of field field2="r=" &r &" ,
u=" &u
end
end
end
```

3 计算结果

在大球内各点用  $P(r, \theta)$  表示, 界面图如图 3 所示, 可以让用户任意地输入  $r$  或  $\theta$  的值, 进行计算; 可以选定  $r$  值, 取不同的角度进行计算; 也可以选定  $\theta$ , 取不同的  $r$  值进行计算。当  $\theta=0$  时,  $r \in (0, 2)$ , 可求出  $O_1$  点向右各点的电势; 当  $\theta=180^\circ$ ,  $r \in (0, 2)$ , 则可求出  $O_1$  点向左各点的电势, 如表 1 所示,  $O_1O_2$  轴线上各点电势曲线图如图 4 所示。  $r=2, \theta \in (0, 180^\circ)$ , 可求出球边缘各点的电势从 3 到  $11/3$  逐渐增大。

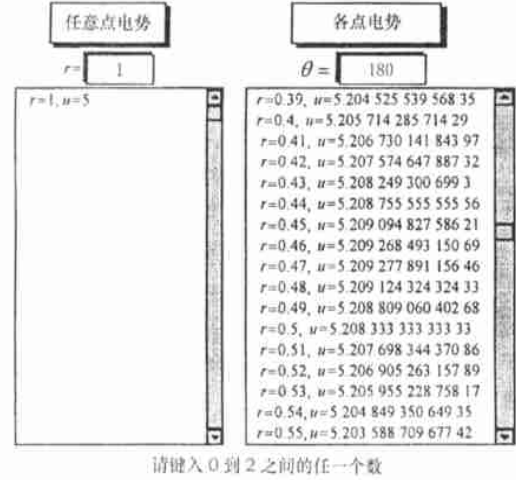


图 3 软件界面图

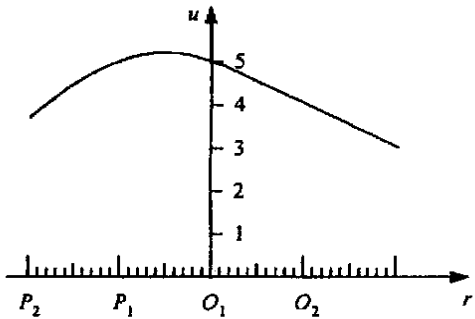


图 4  $O_1O_2$  轴线上各点的电势

表 1  $O_1O_2$  轴上各点电势数值计算表

$\theta=0$	$r$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$u$	4.900 0	4.800 0	4.700 0	4.600 0	4.500 0	4.400 0	4.300 0	4.200 0	4.100 0	4.000 0
	$r$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
	$u$	3.900 0	3.800 0	3.700 0	3.600 0	3.500 0	3.400 0	3.300 0	3.200 0	3.100 0	3.000 0
$\theta=180^\circ$	$r$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$u$	5.085 9	5.146 7	5.185 8	5.205 7	5.208 3	5.519 5	5.166 8	5.124 4	5.068 7	5.000 0
	$r$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
	$u$	4.918 8	4.825 5	4.720 2	4.603 3	4.475 0	4.335 4	4.184 6	4.022 9	3.850 2	3.666 7
	$r$	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51
	$u$	5.207 57	5.208 25	5.208 76	5.209 09	5.209 27	5.209 28	5.209 12	5.208 81	5.208 33	5.207 70

4 结 论

通过数值计算和绘制电势曲线图, 找到在  $O_1O_2$  轴线上距  $O_1$  左侧  $0.47R$  处出现了电势极大值。在物理教学中, 有许多问题值得认真计算, 除了上述的静电场的电势问题外, 还有亥姆霍兹线圈轴线上各点的磁感强度、螺线管中各点的磁场等等, 利用计算机进行计算, 可以得到具体的数值结果, 加深对物理概念、物理图像的理解。由此可见, 数字化技术是实现教学现代化的有力支撑, 运用计算机的数值计算、数字处理、数字动画、数字作图等技术, 让计算机真正进入物理教

学中, 使物理教学有声有色, 不断提高学生学习物理兴趣和计算机应用能力。

参考文献:

[1] 李元杰, 孙威娜. 全面引入数字化技术 推进基础物理教学 [J]. 重庆大学学报, 2002, 25: 46-49.  
[2] 吴百诗. 大学物理(上册) [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1990. 202.  
[3] 宣桂鑫, 江兴方. 多媒体物理教学软件开发与应用 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001.  
[4] 江兴方. 模拟静电场的多媒体软件制作 [J]. 江苏石油化工学院学报 1998, 11 (2): 54-57.

## Numerical Calculation of an Electrostatic Field Problem

JIANG Xing—fang

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** The computer was applied in physics teaching. Electric potential values in electrostatic field were got by numerical calculation, a curve of electric potential was drawn, and a point of maximum value was found. It illustrated the impulse development of physics teaching modernization when the digitization technology was applied to physics teaching.

**Key words:** electrostatic field; numerical calculation; digitization technology

附: 绘制  $O_1O_2$  轴上各点电势曲线程序

to handle buttonclick

textline 1 of text of field field2= “r=” &0 & “,  
u=” &5

local u [ 200]

step i from 1 to 200

u [ i] =0

end

step i from 1 to 200

if i<101

step j from 0 to 0

r=i/50; s=j \*PI/180

if ( $r^2+1-2 *r * \cos (s)$ ) =0

u [ 50] =4

else

if ( $\cos (s) \geq 0.5 *r$ )

u [ i] = $5-r^2/2-0.5 * (2 *r * \cos (s) -r^2)$

else

u [ i] = $6-r^2/2-1/(\sqrt{r^2+1-2 *r * \cos (s)})$

end

end

textline i+1 of text of field field2= “r=”  
&r & “, u=” &u [ i]

end

else

step j from 180 to 180

r= (i-100) /50; s=j \*PI/180

if ( $r^2+1-2 *r * \cos (s)$ ) =0

u [ 50] =4

else

if ( $\cos (s) \geq 0.5 *r$ )

u [ i] = $5-r^2/2-0.5 * (2 *r * \cos (s) -r^2)$

else

u [ i] = $6-r^2/2-1/(\sqrt{r^2+1-2 *r * \cos (s)})$

end

end

textline i+101 of text of field field2= “r=”  
&r & “, u=” &u [ i]

end

end

end

step i from 2 to 200

if i<101

set vertices of line ( “line” &i) to 5 000+ (i-1) \*20, 4 000-u [ i-1] \*500, 5 000+i \*20, 4 000-u [ i] \*500

else

set vertices of line ( “line” &i) to 5 000- (i-100) \*20, 4 000-u [ i-1] \*500, 5 000- (i-100) \*20, 4 000-u [ i] \*500

end

end

end