第 15 卷第 3 期　　江苏工业学院学报　　Vol. 15 No. 3
2003 年 9 月　　JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Sep. 2003

文章编号：1005－8893（2003）03－0058－03

关于一个代数方程迭代解法的收敛性*

黄清龙
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：讨论一个代数方程迭代解法的局部收敛性。对适当范围的初始值证明该迭代法收敛且至少具有 3 阶敛速，并讨论 Gauss－Seidel 加速技巧在其中的应用。

关键词：代数方程；迭代法；初值；收敛性
中图分类号：O 241　　文献标识码：A

设有 n 次代数方程：

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=0 \tag{1}$$

其中 $r_i\neq r_j$ $(i\neq j)$。

文献 [1] 讨论了非线性代数方程（1）的一个改进牛顿法，其迭代公式为：

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\alpha_i^{(k)}}{1+\alpha_i^{(k)}\beta_i^{(k)}} \tag{2}$$

其中

$$\alpha_i^{(k)}=-\frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \tag{3}$$

$$\beta_i^{(k)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}} \tag{4}$$

$x_j^{(0)}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是方程（1）的 n 个根的初始近似值。

文献 [2] 改进了（2）式的收敛阶。文献 [3] 的效率分析说明（2）式是一个比较好的迭代法，对于同时求解 n 次代数方程（1）的 n 个根而言，当 $n\geqslant 6$ 时其效率高于常用的 Newton 法。但文献 [1] 对迭代初值的要求不能保证（2）式的收敛性，因而对收敛阶的讨论也不能严格进行。

本文将证明对适当范围内的初值选择，（2）式收敛且收敛阶至少是 3。并讨论了对（2）式应用 Gauss－Seidel 技巧时的收敛性。

1　主要结果及证明

为了证明需要，将（2）改写成：

$$h_i^{(k+1)}=\frac{A_i^{(k)}}{1+A_i^{(k)}}h_i^{(k)} \tag{5}$$

其中 $h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-r_i$，$i=1, 2, \cdots, n$；$k=0, 1, 2, \cdots$。

$$A_i^{(k)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)(r_j-x_j^{(k)})}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})} \tag{6}$$

记

$$h^{(k)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|h_i^{(k)}|\quad(k=0, 1, 2, \cdots) \tag{7}$$

$$d=\max_{1\leqslant i<j\leqslant n}|r_i-r_j| \tag{8}$$

取常数 $s>\frac{3+\sqrt{8n-7}}{2}$，$n$ 是代数方程（1）的次数。并记

$$p=\frac{n-1}{(s-1)(s-2)},\quad q=\frac{p}{1-p} \tag{9}$$

不难验证

$$0<p<\frac{1}{2},\quad 0<q<1 \tag{10}$$

定理 1　当迭代初值 $x_j^{(0)}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 满足 $|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$ 时由（2）式产生的序列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 r_i，且收敛阶至少为 3。

* 收稿日期：2003－06－06
基金项目：江苏省高校自然科学研究项目（02KJD110001）
作者简介：黄清龙（1963－），男，重庆忠县人，硕士，副教授，从事应用数学和计算数学等方面的研究。

证明：下面先通过不等式估计结合数学归纳法证明收敛性。当迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）满足$|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$时，有

$$|x_i^{(0)}-r_j|\geqslant|r_i-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant(s-1)\frac{d}{s},$$

$$|x_j^{(0)}-x_i^{(0)}|\geqslant|r_i-r_j|-|x_j^{(0)}-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant(s-2)\frac{d}{s}$$

由此可得：

$$|A_i^{(0)}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{|h_i^{(0)}|\cdot|h_j^{(0)}|s^2}{(s-1)(s-2)d^2}\leqslant\frac{n-1}{(s-1)(s-2)}=p<\frac{1}{2} \tag{11}$$

则由（5）式得：

$$|h_i^{(1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(0)}|}{1-|A_i^{(0)}|}|h_i^{(0)}|\leqslant q|h_i^{(0)}| \tag{12}$$

一般地，设$|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1, 2, \cdots, n$）则类似地估计可得

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{s^2|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|}{(s-1)(s-2)d^2}\leqslant p<\frac{1}{2} \tag{13}$$

$$|h_i^{(k+1)}|\leqslant q|h_i^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s} \tag{14}$$

这里 p，q 仍由（9）式确定。因此由数学归纳法知当定理的条件满足时，（14）式总成立。反复利用（14）式则得，$|h_i^{(k)}|\leqslant q^k|h_i^{(0)}|\leqslant\left(\frac{d}{s}\right)q^k$，注意到 $0<q<1$，故当 $k\to\infty$时 $h_i^{(k)}\to 0$，即 $x_i^{(k)}\to r_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）。

利用（7）式，则由（13）式知：

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\frac{(n-1)s^2}{(s-1)(s-2)d^2}|h^{(k)}|^2\leqslant\frac{ps^2}{d^2}|h^{(k)}|^2$$

注意到 $A_i^{(k)}|<\frac{1}{2}$，故由（5）式得：

$$|h_i^{(k+1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(k)}|}{1-|A_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|\leqslant\frac{2ps^2}{d^2}|h^{(k)}|^3$$

所以迭代式（2）是至少 3 阶收敛的。证毕。

2 （2）式的 Gauss—Seidel 加速

将 Gauss—Seidel 技巧应用于迭代式（2）则得

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\alpha_i^{(k)}}{1+\alpha_i^{(k)}\gamma_i^{(k)}} \tag{15}$$

其中

$$\gamma_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{x_i^{(k)}-x_j^{(k+1)}}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}} \tag{16}$$

$$\alpha_i^{(k)}=-\frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}$$

定理 2　当迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）满足$|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$时由（15）式产生的序列$\{x_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$收敛于 r_i，且至少 3 阶收敛。这里常数 $s>\frac{3+\sqrt{8n-7}}{2}$，$d$ 仍由（8）式确定。

证明：将（15）式改写成

$$h_i^{(k+1)}=\frac{B_i^{(k)}}{1+B_i^{(k)}}h_i^{(k)} \tag{17}$$

其中 $h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-r_i$，$i=1, 2, \cdots, n$；$k=0, 1, 2, \cdots$

$$B_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)(r_j-x_j^{(k+1)})}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k+1)})}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)(r_j-x_j^{(k)})}{(x_i^{(k)}-r_j)(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})} \tag{18}$$

当迭代初值 $x_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, n$）满足$|x_j^{(0)}-r_j|\leqslant\frac{d}{s}$时，注意到 $x_1^{(1)}$ 仍由（2）式产生，故由定理 1 证明中的（14）式知$|h_1^{(1)}|\leqslant q|h_1^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$，其中 $q<1$ 仍由（9）式确定。

现假设对 $j=1, 2, \cdots, i-1$ 有

$|h_j^{(1)}|\leqslant q|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$。因为

$$|x_i^{(0)}-r_j|\geqslant(s-1)\frac{d}{s},$$

$$|x_j^{(1)}-x_i^{(0)}|\geqslant|r_i-r_j|-|x_j^{(1)}-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant\frac{(s-1-q)d}{s},\quad(j=1, 2, \cdots, i-1)$$

由此可得：

$$|B_i^{(0)}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q|h_i^{(0)}|\cdot|h_j^{(0)}|s^2}{(s-1)(s-1-q)d^2}+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|h_i^{(0)}|\cdot|h_j^{(0)}|s^2}{(s-1)(s-2)d^2}\leqslant\frac{n-1}{(s-1)(s-2)}=p<\frac{1}{2}$$

则由（17）式得：

$$|h_i^{(1)}|\leqslant\frac{|B_i^{(0)}|}{1-|B_i^{(0)}|}|h_i^{(0)}|\leqslant q|h_i^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s} \tag{19}$$

由归纳法知：对 $j=1, 2, \cdots, n$，$|h_j^{(1)}|\leqslant q|h_j^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$都成立。

一般地，设$|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1, 2, \cdots, n$），则类似地估计可得

$$|B_i^{(k)}|\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|s^2}{(s-1)(s-1-q)d^2}+$$

$$\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|h_i^{(k)}|\cdot|h_j^{(k)}|s^2}{(s-1)(s-2)d^2}\leqslant\frac{n-1}{(s-1)(s-2)}=p<\frac{1}{2} \tag{20}$$

$$|h_j^{(k+1)}|\leqslant q|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s} \tag{21}$$

再由数学归纳法知：对 $j=1,2,\cdots,n$ 和整数 $k\geqslant0$，（20）、（21）两式总成立。由（21）式得 $|h_j^{(k)}|\leqslant q^k|h_j^{(0)}|\leqslant\left(\frac{d}{s}\right)q^k$，故当 $k\to\infty$ 时 $h_j^{(k)}\to0$，即 $x_j^{(k)}\to r_j$（$j=1,2,\cdots,n$）。

利用（7）式，由（20）式知：

$$|B_i^{(k)}|\leqslant\frac{s^2}{(s-1)d^2}\left[\frac{(i-1)q}{s-1-q}+\frac{n-i}{s-2}\right]|h^{(k)}|^2$$

并且 $|B_i^{(k)}|<1/2$。

故由（17）式得：

$$|h_i^{(k+1)}|\leqslant\frac{|B_i^{(k)}|}{1-|B_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|\leqslant$$

$$\frac{2s^2}{(s-1)d^2}\left[\frac{(i-1)q}{s-1-q}+\frac{n-i}{s-2}\right]|h^{(k)}|^3$$

所以迭代式（15）是至少 3 阶收敛的。

3 数值例子

在文献 [4] 中用一个修正的 Halley 迭代法求解过地震波理论中的 Rayleigh 方程 $32x^3-56x^2+24x-3=0$。为了便于比较，这里用本文的（2）式和（15）式及 Newton 法编程计算该方程的全部根，迭代初值分别取 0，0.5，1.5，精度要求 10^{-13}。（2）式和（15）式的计算结果见表 1，Newton 法计算的中间结果不列出了，其经过 8 次迭代后满足精度要求的数值解为 $x_1^{(8)}=0.250\,000\,000\,000\,0$，$x_2^{(8)}=0.316\,987\,298\,107\,8$，$x_3^{(8)}=1.183\,012\,701\,892\,2$。比较它们的结果得知从同样的迭代初值出发，要使全部根都达到精度要求，用迭代式（2）需迭代 5 步，用（15）式只要迭代 4 步，而利用 Newton 迭代式则需 8 步。可见（2）式和（15）式都收敛且比 Newton 法收敛更快。

表 1　迭代法的数值计算结果

迭代公式	迭代次数	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
迭代式（2）	0	0	0.5	1.5
	1	0.187 500 000 000 0	0.357 142 857 142 9	1.180 851 063 829 8
	2	0.243 598 330 449 2	0.321 863 174 684 8	1.183 012 754 040 9
	3	0.249 965 399 050 9	0.317 014 208 619 1	1.183 012 701 892 2
	4	0.249 999 999 992 8	0.316 987 298 113 4	1.183 012 701 892 2
	5	0.250 000 000 000 0	0.316 987 298 107 8	1.183 012 701 892 2
迭代式（15）	0	0	0.5	1.5
	1	0.187 500 000 000 0	0.327 586 206 896 6	1.186 043 443 848 4
	2	0.247 786 896 267 3	0.317 026 841 468 2	1.183 012 724 557 4
	3	0.249 999 959 579 2	0.316 987 298 107 8	1.183 012 701 892 2
	4	0.250 000 000 000 0	0.316 987 298 107 8	1.183 012 701 892 2

参考文献：

[1] Ehrlich L W. A Modified Newton Method for Polynomials [J]. Comm ACM, 1967, 10: 107—108.

[2] Milovanovic G V, Petkovic M S. On the Convergence Order of a Modified Method for Simultaneous Finding Polynomial Zeros [J]. Computing, 1983, 30: 171—178.

[3] 黄清龙. 解代数方程时牛顿法的一种改进 [J]. 应用数学, 1995, 8: 73—76.

[4] 黄清龙. 一个求多项式零点的并行迭代法 [J]. 江苏石油化工学院学报, 2001, 13 (2): 49—51.

On the Convergence of an Iterative Method for Algebraic Equations

HUANG Qing—long

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: This paper discussed the convergence of an iterative method for algebraic equations. For appropriately chosen starting values, it was proved that the method was convergent and the convergence order was at least 3. Secondarily, the application of Gauss—Seidel technique in the method was discussed.

Key words: algebraic equation; iterative method; starting values; convergence