第 15 卷第 3 期
2003 年 9 月

江 苏 工 业 学 院 学 报
JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY

Vol. 15 No. 3
Sep. 2003

文章编号：1005－8893（2003）03－0061－02

QI－环及半完备环的一个注记*

赵志新
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：设 S 是 R 的优越扩张。讨论了 R 的性质对 S 的影响及 S 的性质对 R 的影响。

关键词：几乎优越扩张；QI－环；半完备环
中图分类号：O 175　　　　文献标识码：A

优越扩张是环的一类重要扩张，它包括了环 R 上的全矩阵环以及环 R 与有限群 G（这里 $|G|^{-1}\in R$）的斜群环 $R*G$。关于优越扩张的研究已出现了许多重要的成果[1~5]。本文继续这一方面的研究，探讨在几乎优越扩张下环 R 与环 S 的性质的相互关系，此处 S 是 R 的优越扩张。

设环 R 是环 S 的子环，且 R 和 S 具有相同的单位元，如果存在有限集 a_1，a_2，…，$a_n\in S$，$S=\sum_{i=1}^{n}a_iR$，$a_iR=Ra_i$（$i=1\sim n$）。称 S 是环 R 的有限正规扩张。Shamsuddin A 在文献 [6] 中研究了此种扩张下模及同调维的几个结论。环 S 称为环 R 的优越扩张，如满足

（A）S 是 R 的自由正规扩张，亦即存在一个有限集，a_1，…，$a_n\subseteq S a_1=1$，$S=a_1R+\cdots+a_nR$ $a_iR=Ra_i$（$\forall i=1\sim n$，S 作为左，右 R－模是自由的。

（B）S 是 R－投射的，即如 N_S 是 M_S 的子模，则有 $N_R|M_R$ 就有 $N_s|M_s$。

优越扩张是由 Passman[7] 例子包含 $Mn(R)$[8] 及 $R*G$（G 是有限群，$o(G)^{-1}\in R$）。文献 [8，9] 给出了其它例子。

1　优越扩张

环扩张 $S\geqslant R$ 称为几乎优越扩张，如果 S 是 R 的有限正规扩张且满足

（B）S 是投射的即 $N_S\leqslant M_S$ 如 $N_R|M_R$ 则有 $N_S|M_S$。

（C）S_R 是投射右 R－模，${}_RS$ 是平坦左 R－模。

显然优越扩张是几乎优越扩张。

下面的命题可见文献 [1，4]

命题 1.1　S 是 R 的几乎优越扩张，则

（1）R－模 M 是平坦的当且仅当是 S－平坦。

（2）S－模 M_S 是 S－平坦当且仅当 M_R 是 R－平坦。

命题 1.2　S 是环 R 的几乎优越扩张，则

（1）右 S－模 M 是投射 R－模当且仅当 M_S 是投射 S－模。

（2）右 S－模 M_S 是内射当且仅当 M_R 是内射的。

环 R 称为右 QI－环如果任一拟内射右 R－模都是内射的。V－环是 QI－环，而文献 [10] 作者证明了如 S 是 R 的优越扩张则 S 是 V－环的充分必要条件是 R 是 V－环，我们有：

定理 1.3　S 是环 R 优越扩张，则 S 是 QI－环当且仅当 R 是 QI－环。

证明：如 R 是右 QI－环及 M_S 拟内射右 S－模。因 S 是 R 的优越扩张，则 M_S 作为 R－模是拟内射右 R－模，从而 M 是内射 R－模。由命题 2 知 M_S 是内射 S－模，那么即有 R 是 QI－环。

* 收稿日期：2003－04－04
基金项目：江苏工业学院科技基金资助
作者简介：赵志新（1963－），男，江苏武进人，副教授，主要研究方向为矩阵理论和环理论。

反之，S 是右 QI—环，M_R 是拟内射右 R—模。则 $M\otimes S$ 是拟内射右 S—模，从而 $M\otimes S$ 是内射 S—模，进而有 $M\otimes S$ 是内射 R—模。有下面的 R—模同构

$$M\otimes S\cong M\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}R\right)\cong\sum_{i=1}^{n}M$$

即有 M_R 是内射 R—模，R 是 QI—环。

下面的命题见文献 [5]。

命题 1.4　S 是 R 的优越扩张，M 是右 R—模如 M_R 有投射覆盖 f：$P_R\to M_R$ 则（$M\otimes S$）$_S$ 有投射覆盖 $f\otimes 1$：$P_R\otimes S\to M_R\otimes S$。

环 R 称为右半完备环，如任一单右 R—模有投射覆盖。我们有

定理 1.5　S 是 R 的优越扩张，则 S 是半完备环的充分必要条件 R 是半完备环。

证明：假设 R 是半完备环，M_S 是单 S—模，则 M 作为 R—模是半单的，从而 M_R 有投射覆盖及（$M\otimes S$）$_S$ 有投射覆盖。$M_S\cong Q_S$，Q_S ｜（$M\otimes S$）$_S$。即有 M_S 有投射覆盖亦即 S 是半完备环。

反之如 S 是半完备环及是单 R—模，则（$M\otimes S$）$_S$ 是半单 S—模，那么（$M\otimes S$）$_S$ 有投射覆盖亦即有投射覆盖。有下面的 R—模同构

$$M\otimes S\cong M\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}R\right)\cong\sum_{i=1}^{n}M$$

亦即 M_R 有投射覆盖。从而亦即 R 是半完备环。

2　Smach 积

设 G 是有限群，R 是 G—分次环。在以 $\{p_a | a\in G\}$ 为基的自由左、右 R—模上定义如下乘法：

$$(rp_a)(sp_b)=rs_{ab^{-1}}p_a$$

这里 $s_{ab^{-1}}$ 表示 s 的 ab^{-1} 分量。这样所构成的环叫做环 R 与群 G 的 Smach 积，记为 $R\,\sharp\,G^*$。关于 Smach 积的讨论可见文献 [8]。

定理 2.1　设 G 是有限群，R 是 G—分次环，且 G 的阶数 $|G|^{-1}\in R$ 满足。则

（1）$R\,\sharp\,G^*$ 是 QI—环当且仅当 R 是 QI—环。

（2）$R\,\sharp\,G^*$ 是半完备环当且仅当 R 是半完备环。

证明：定义 G 在 $R\,\sharp\,G^*$ 上的如下作用：

$$a(rp_b)=rp_{ba}$$

则可得到斜群环（$R\,\sharp\,G^*$）$*G$。由文献 [8] 可知有如下的环同构式：

$$(R\,\sharp\,G^*)*G\cong M_n(R)$$

这里 M_n（R）表示 R 上的 nxn 全矩阵环，其中 $n=|G|$。由文献 [9，10] 知全矩阵环 M_n（R）以及斜群环（$R\,\sharp\,G^*$）$*G$（当 $|G|^{-1}\in R\,\sharp\,G^*$ 时）分别是 R 和 $R\,\sharp\,G^*$ 的优越扩张，从而由 $|G|^{-1}\in R$ 以及定理 1.3 及定理 1.5 即得结论。

参考文献：

[1] 赵志新，刘仲奎．广义优越扩张 [J]．江苏石油化工学院学报，1996，8（3）：42—46.

[2] Zhao Zhixin，Liu Zhongkui．PC—rings and Almost Excellent Extensions [J]．Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2001；16（3）：42—47.

[3] 刘仲奎．环的 Excellent 扩张 [J]．数学学报，1991，34（6）：818—824.

[4] Zhao Zhixin．Remarks on Quasi—perfect Rings and FC—Rings [J]．J of Math（PRC），1997，17（4）：505—509.

[5] Fang Hongjin．Normalizing Extensions and Modules [J]．J of Math Research and Exposition，1992，12（3）：401—406.

[6] Shamsuddin．Finite Normaliging Extensions [J]．J of Alg，1992，151：218—220.

[7] Passman D S．The Algebraic Structure of Group Rings [M]．New York：Wileg—Interscience，1977.

[8] Quinn D．Group Graded Rings and Duality [J]．Trans Amer Math Soc，1985，292：154—167.

[9] Passman D S．It's Essentially Maschke's Theorem [J]．Rocky Mmountain J Math，1983，13：37—54.

[10] Soueif L．Normaliging Extensions and Injective Modules，Essentially Bounded Normaliging Extensions [J]．Comm Alg，1987，15：565—610.

Remark on QI—ring and Semiperfect Ring

ZHAO Zhi—xin

(Department of Information Science，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213016，China)

Abstract：S was an excellent extension of ring R. In this paper，the relations between the properties of the ring S and R were obtained.

Key words：QI—ring；excellent extension；semiperfect ring