文章编号: 1005-8893 (2003) 03-0063-02

一个关于正定矩阵的不等式*

汪明瑾
(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 利用 Greub-Rheinboldt 不等式, 给出了一个新的关于正定矩阵及其特征值的不等式, 丰富了在统计领域有重要应用价值的 Kantorovich 型不等式。

关键词: 不等式; 正定 Hermite 阵; 特征值
中图分类号: O 211.5 文献标识码: A

有关正定矩阵及其特征值的不等式是不等式领域的重要组成部分, 这种类型的不等式在许多方面有着重要的应用, 特别是它在概率论与数理统计领域的作用尤其突出。Kantorovich 型不等式是这种类型不等式的一个重要代表。近年来国内外的许多学者纷纷给出 Kantorovich 型不等式的推广、延拓及其应用[2~6]。本文给出了一个新的关于正定矩阵及其特征值的不等式, 进一步丰富了 Kantorovich 型不等式。

定理: 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, λ_1, λ_n 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值, μ_1, μ_n 分别为 $\boldsymbol{B}$ 的最大和最小特征值。则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$, 有

$$\frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}\leqslant\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}$$

等号成立的充要条件为: $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{E}$, 其中 λ, $\mu\in R^+$, $\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。

证明: 根据 Greub-Rheinboldt 不等式[1]

$$\frac{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{AB})^2}\leqslant\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{4\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n},$$

我们有

$$\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x}\leqslant\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{4\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})^2。$$

注意到 $\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}\geqslant 1$, 所以

$$[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2=(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}\leqslant(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})+2\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})$$

$$\leqslant\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})+2\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})+\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})=\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x}]=\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}。$$

即

$$\frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}\leqslant\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}。$$

下证等号成立的充要条件为: $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{E}$, 其中 λ, $\mu\in R^+$, $\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。

充分性: 若 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{E}$, 则 $\lambda_1=\lambda_n=\lambda$, $\mu_1=\mu_n=\mu$, 此时

$$\frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}=\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}=1。$$

必要性: 若 $\frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}=$

* 收稿日期: 2003-03-04
基金项目: 江苏省教育厅自然科学研究基金资助 (02KJD110002); 江苏工业学院科技基金资助
作者简介: 汪明瑾 (1961-), 男, 安徽歙县人, 硕士, 副教授, 主要研究方向为概率统计。

$\dfrac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}$。

由定理的证明过程知，必有 $\dfrac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}=1$。所以 $\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n=2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}$，$\lambda_1\mu_1=\lambda_n\mu_n$。由于 $\lambda_1\geqslant\lambda_n$ 且 $\mu_1\geqslant\mu_n$，故有 $\lambda_1=\lambda_n$ 且 $\mu_1=\mu_n$。即，$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{E}$，其中 $\lambda,\mu\in R^+$。

推论 1：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$0<\lambda_i<1\ (i=1,\cdots,n)$。则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{\{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{x}]^{1/2}\}^2}{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}}\leqslant \frac{\lambda_1(1-\lambda_n)+\lambda_n(1-\lambda_1)}{2\sqrt{\lambda_1(1-\lambda_n)\lambda_n(1-\lambda_1)}}。$$

等号成立的充要条件为：$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$，其中 $\lambda\in(0,1)$，$\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。

证明：在定理中令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$。在推论条件下，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足定理所有条件。注意到 $\mu_1=1-\lambda_n$，$\mu_n=1-\lambda_1$，即得推论 1。

推论 2：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 正定Hermite 阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\lambda_1$，$\lambda_n$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值，μ_1，μ_n 分别为 $\boldsymbol{B}$ 的最大和最小特征值。则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})}{[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}]^2}\leqslant\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{64\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}。$$

等号成立的充要条件为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}$，其中 $\lambda\in R^+$，$\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。

证明：由于 $[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2\geqslant[2\sqrt{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}}]^2=4(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}$，所以

$$\frac{4(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}\leqslant \frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}\leqslant\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}} \tag{1}$$

两边平方得

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})}{[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}]^2}\leqslant\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{64\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}。$$

下证等号成立的充要条件为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}$，其中 $\lambda\in R^+$，$\boldsymbol{E}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。

充分性：若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}$，直接计算得

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})}{[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}]^2}=\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{64\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}=\frac{1}{16}。$$

必要性：若

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})}{[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}]^2}=\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n)^2}{64\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n},$$

由 (1) 知

$$\frac{[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2}{\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{x}}=\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_n\mu_n}{2\sqrt{\lambda_1\mu_1\lambda_n\mu_n}}。$$

根据定理有：$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{E}$，其中 $\lambda,\mu\in R^+$。又因为 $[(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}+(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}]^2=[2\sqrt{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}}]^2=4(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^{1/2}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^{1/2}$，即 $(\lambda+\mu)^2=4\lambda\mu$，所以 $\lambda=\mu$。故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}$。

参考文献:

[1] 王松桂，贾忠贞. 矩阵论中不等式 [M]. 合肥：安徽教育出版社，1994. 144－153.

[2] Wang Songgui, Shao. J Constrained Kantorovich Inequalities and Relative Efficiency of Least Squares [J]. J Multi Analysis, 1992, 42: 284－289.

[3] Bloomfield P, Watson G S. The Inefficiency of Least Squares [J]. Biometrika, 1975, 62: 121－128.

[4] Wang Mingjin. The Mean Inequality of Random Variables [J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2002, 5 (4): 755－763.

[5] Wang Songgui, Yang Hu. Kantorovich－tpye Inequalities and the Measures of Inefficiency of the GLSE [J]. Acta Mathematicae Aoplicatae Sinica, 1989, 5: 372－381.

[6] 汪明瑾. Kantorovich 不等式的一种推广应用 [J]. 江苏石油化工学院学报，2002，14 (1)；51－52.

An Inequality about Positive Matrix

WANG Ming－jin

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In this paper, we proved an inequality about positive Hermitian matrixes and their eigenvalues by using Greub－Rheinboldt inequality. The result contributes to Kantorovich－tpye inequalities, which is useful in statistics.

Key words: inequality; positive Hermitian matrix; eigenvalue