

文章编号: 1005—8893 (2003) 04—0047—04

分形图的 IFS 码设计

闫玉宝

(江苏工业学院 计算机科学与工程系, 江苏 常州 213016)

摘要: 简要介绍了迭代函数系统 (IFS) 的基本理论, 讨论了如何利用 IFS 理论构造分形图的方法, 分析了 IFS 中参数产生的过程、函数个数与图形形状之间的关系以及概率的设计对生成分形图的影响。最后, 结合计算机图形学, 给出 IFS 技术构造二维和三维分形图的若干示例。

关键词: 分形图; 迭代函数系统; 迭代函数系统参数; 概率
中图分类号: TP 391.4 **文献标识码:** A

分数维图形可以模拟天际的积云、空中的闪电、地上的森林、海上的浪花、燃烧的火焰、树木的生长以及如分子、粒子的运动等物理现象。可以用分形图设计壁纸、地板革、地板砖、纺织品等日用品的图案。众所周知, 迭代函数系统 IFS (Iterated Function System) 是构造分形图的重要方法之一, IFS 为计算机模拟一些自然现象的真实感图形提供了一个有力的工具。特别是利用带有概率的 IFS 即 IFSP 算法绘制 Fractal 图, 与单纯迭代法绘图相比, 不仅实现的代码简单, 而且降低了对计算机硬件的要求。目前对于构造分形图的 IFS 码的求取还没有一般的方法。本文通过对 IFS 理论的分析以及对 IFS 参数的讨论, 给出了设计 IFS 码的一种方法, 并且给出了若干个示例, 所有示例图形均由作者通过 OpenGL 编程, 在 VC++6.0 环境下得到实现。

1 IFS 基本理论

1.1 迭代函数系统 (IFS)

对于分形空间 $(\Psi(X), h)$ 上的压缩映射 $\bigwedge_{w_i}: \Psi(X) \rightarrow \Psi(X)$, 其压缩因子为 c_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$)。定义映射 $W: \Psi(X) \rightarrow \Psi(X)$, 即:

$$W(B) = \bigwedge_{w_1}(B) \cup \bigwedge_{w_2}(B) \cup \dots \cup \bigwedge_{w_n}(B) = \bigcup_{i=1}^n \bigwedge_{w_i}(B), \quad \forall B \in \Psi(X)$$

则 W 是压缩映射, 且压缩因子 $c = \max\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 即:

$$h(W(A), W(B)) \leq c \cdot h(A, B), \quad \forall A, B \in \Psi(X).$$

由这 n 个压缩映射 $\bigwedge_{w_i}: \Psi(X) \rightarrow \Psi(X)$, 及其压缩因子 c_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 组成一个迭代函数系统 IFS^[1]。

1.2 压缩映射不动点理论及拼贴定理

压缩映射不动点定理: 设 $\{X; w_1, w_2, \dots, w_n; c\}$ 是 (X, d) 上的一个 IFS, 压缩变换 W 存在唯一的不动点 $\bar{A} \in \Psi(X)$, 满足 $\bar{A} = W(\bar{A}) = \bigcup_{i=1}^n \bigwedge_{w_i}(\bar{A})$, 而且不动点可以通过迭代得到, 即 $\bar{A} = \lim W^n(B), \quad \forall B \in \Psi(X)$ ^[2]。

拼贴定理: 给定集合 $L \in \Psi(X)$ 和 $\epsilon > 0$, 若能找到一个 IFS $\{X; w_1, w_2, \dots, w_n; c\}$ 使 $h(L, \bigcup_{i=1}^n \bigwedge_{w_i}(L)) \leq \epsilon$, 则:

$$h(L, \bar{A}) \leq \frac{h(L, \bigcup_{i=1}^n \bigwedge_{w_i}(L))}{1-c} \leq \frac{\epsilon}{1-c}$$

* 收稿日期: 2003—05—06

作者简介: 闫玉宝 (1965—), 男, 河南南阳人, 讲师, 硕士, 主要从事图形图象和 CAD 的教学与研究工作。

其中: \bar{A} 是 IFS 不动点 (吸引子)^[2]。

该理论说明, 对于 L , 如能找到一个 IFS, 使 L 恰为 IFS 的吸引子, 则 L 完全由 IFS 确定。根据不动点 \bar{A} 是复制它本身的变换 $W(\bar{A})$ 构造出来的, 因此, 对 L 进行压缩变换, 然后把它们粘贴到一起, 用“拼贴” $W(L)$ 近似表示 L ^[3]。

2 IFS 构造分形图的算法

一个二维 IFS $\{R^2; w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 其中映射 w_1, w_2, \dots, w_n 是二维压缩仿射变换, 就可以利用计算机从这组仿射变换迭代出图形。如果在 IFS 中加入概率, 那么就可以从一个点出发绘制出图形。

随机迭代算法: IFSP $\{R^2; w_1, w_2, \dots, w_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 任取 $x_0 \in R^2$, 然后反复、独立地选取 $x_k \in \{w_1(x_{k-1}), w_2(x_{k-1}), \dots, w_n(x_{k-1})\}$, 其中 $x_k = w_i(x_{k-1})$ 的概率为 $p_k, i=1, 2, 3, \dots$ 。于是构造出点列 $\{x_k; k=1, 2, 3, \dots\} \subset R^2$, 该点列 (以概率 1) 收敛到 IFS 的吸引子。

3 IFS 参数的设计

3.1 IFS 的压缩映射 w_i 的参数设计

由分形图的相似结构, 每一个压缩映射 w_i 是由平移、旋转和比例 3 种变换以及它们的复合变换构成的仿射变换^[4], 二维形式为:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & e_i \\ c_i & d_i & f_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中参数 a_i, b_i, c_i, d_i 由旋转、比例变换所决定的实数; e_i, f_i 由平移变换所决定的实数。三维形是由相应的三维空间几何变换复合而成。

IFS 吸引子自然景观的模拟总是在一个矩形区域内进行, 取度量空间 $([0, 1] \times [0, 1], d)$, 由于 w_i 是压缩变换, $w_i([0, 1] \times [0, 1]) \subset [0, 1] \times [0, 1]$ 。因此, 参数 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ 的取值范围在 $[-1, 1]$; e_i 的取值影响植物 x 方向的偏离程度, f_i 的取值影响植物在竖直 y 方向的生长程度, 一般取值为正。

$$\text{由于} \begin{pmatrix} a_i & b_i & e_i \\ c_i & d_i & f_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 1 & 0 & e_i \\ 0 & 1 & f_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 的乘积 (次序由}$$

具体的变换确定), 因此, 在构造 w_i 时应取 $0 < s_x \leq 1, 0 < s_y \leq 1, -1 \leq e_i, f_i \leq 1$, 当然 e_i, f_i 也可以超出 $[-1, 1]$ 范围, 若选取不当, 拼贴出的图形会产生分离现象。一般地构造 w_i 的步骤是: 首先取一单位长线段 $[0, 1]$; 然后对线段作适当变换。

3.2 IFS 的压缩映射的个数

IFS 的压缩映射 w_i 的个数取决于所模拟事物。一般地 w_i 的个数 ≥ 2 , 并且变换一定包含比例和平移的成分, 它们是压缩映射和构造出点列所必需的。例如, 模拟一棵沿主枝左右对称的植物, 我们可以用一段单位长线段来进行建模如下:

w_1 : 线段缩小一半, $a=d=0.5; c=e=f=0$;

w_2 : 线段缩小一半, 并且向左旋转 45° , $a=-b=c=d=0.3535; e=f=0$;

w_3 : 线段缩小一半, 并且向右旋转 45° , $a=b=-c=d=0.3535; e=f=0$;

w_4 : 线段缩小一半, 并且向上平移 0.5 个单位, $a=d=0.5; c=d=e=0; f=0.5$ 。

根据以上生成 IFS 码, 利用上面的随机迭代算法绘制的图形 (如图 1 所示)。这里 w_4 引导着植物的生长, 缺少它我们将的不到这样一棵植物。当然其它压缩映射也是不可缺少的。整个 IFS 决定了一个分形图。

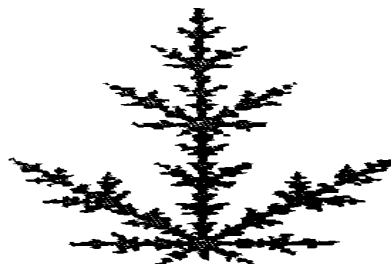


图 1 对称植物模拟

3.3 IFS 中概率 p_1, \dots, p_n 的参数设计

只要满足 $\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, p_1, p_2, \dots, p_n 的大小分配并不影响最终吸引子, 也就是绘制的图形完全由 $w_i (i=1, 2, \dots, n)$ 确定, 与 p_1, p_2, \dots, p_n 无关, p_1, p_2, \dots, p_n 只是

为计算机编程绘图提供了极大的方便, p_1, p_2, \dots, p_n 的大小分配只影响绘图的速度, 即迭代次数。例如, 由表 1 中参数, 迭代 10 万次绘制的图形 (如图 2 所示)。如果修改 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.25$, 经过 100 万次迭代绘制的图形 (如图 3 所示)。

表 1 蕨类植物的 ISFP 码

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>p</i>
w_1	0	0	0	0.170	0	0	0.01
w_2	0.155	-0.235	0.196	0.186	0	0.9	0.07
w_3	-0.155	0.235	0.196	0.186	0	0.4	0.07
w_4	0.850	0.025	-0.025	0.850	0	0.9	0.85



图 2 蕨类植物 (迭代 10 万次)

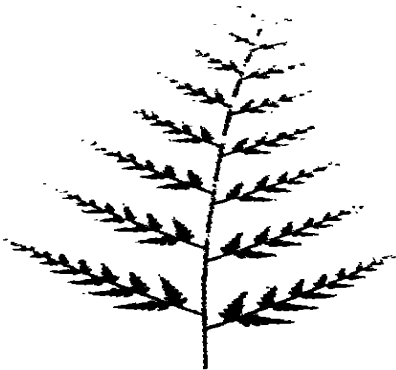
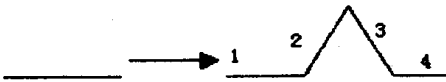


图 3 蕨类植物 (迭代 100 万次)

4 构造 IFS 绘制分形图示例

示例 1: 科克曲线, 它可以看成是一单位长线段经过下列 4 个仿射变换迭代生成。



1: 缩小 $1/3$; 2: 缩小 $1/3$, 旋转 60° , 右平移 $1/3$; 3: 缩小 $1/3$, 旋转 -60° , 右移 $1/2$, 上移 $\sqrt{3}/2$; 4: 缩小 $1/3$, 右平移 $2/3$ 。生成的 IFS 码如表 2 所示, 绘制的分形图如图 4 所示。

表 2 科克曲线的 ISF 码

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
w_1	0.333	0	0	0.333	0	0
w_2	0.167	-0.288	0.288	0.167	0.333	0
w_3	0.167	0.288	-0.288	0.167	0.500	0.288
w_4	0.333	0	0	0.333	0.667	0



图 4 科克曲线

示例 2: C 字曲线图, 它可以看成是一单位长线段经过下列 2 个仿射变换迭代生成。



1: 缩小 $\sqrt{2}/2$, 旋转 45° , 向上平移 $1/2$; 2: 缩小 $\sqrt{2}/2$, 旋转 -45° , 向上平移 $1/2$ 。生成的 IFS 码如表 3 所示, 绘制的分形图如图 5 所示。

表 3 C 字曲线图的 ISF 码

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
w_1	0.5	-0.5	0.5	0.5	0	0.5
w_2	0.5	0.5	-0.5	0.5	0	0.5



图 5 C 字曲线图

示例 3: 枫叶的模拟。

w_1, w_2 是经过缩小、平移形成的复合变换, 决定枫叶的上下方向上拼贴; w_3, w_4 是经过缩小、旋转和平移形成的复合变换, 决定枫叶的左右方向上拼贴。ISF 码如表 4 所示, 绘制的分形图如图 6 所示。

表 4 枫叶的 ISF 码

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
w_1	0.6	0	0	0.6	0.18	0.36
w_2	0.6	0	0	0.6	0.18	0.12
w_3	0.4	0.3	-0.3	0.4	0.27	0.36
w_4	0.4	-0.3	0.3	0.4	0.27	0.09

示例 4: 藤类的模拟。

w_1 是经过缩小变换; w_2, w_3 是经过缩小、旋转形成的复合变换; w_4, w_5 是经过缩小、旋转和平移形成的复合变换。ISF 码如表 5 所示, 绘制

的分形图如图 7 所示。

表 5 藤类的 ISF 码						
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
w_1	0.333 0	0	0	0.333 0	0	0
w_2	0.353 5	-0.353 5	0.353 5	0.353 5	0	0
w_3	0.353 5	0.353 5	-0.353 5	0.353 5	0	0
w_4	0.353 5	0.353 5	-0.353 5	0.353 5	0.353 5	0.353 5
w_5	-0.353 5	-0.353 5	0.353 5	-0.353 5	0.353 5	0.353 5

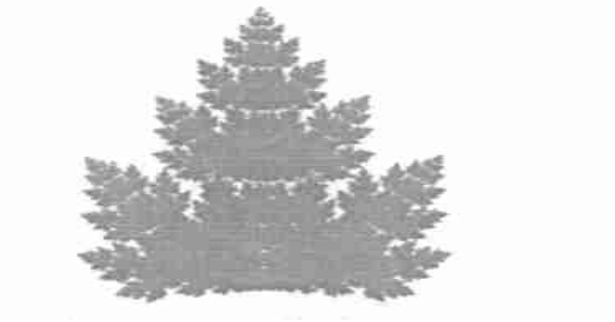


图 6 枫叶模拟

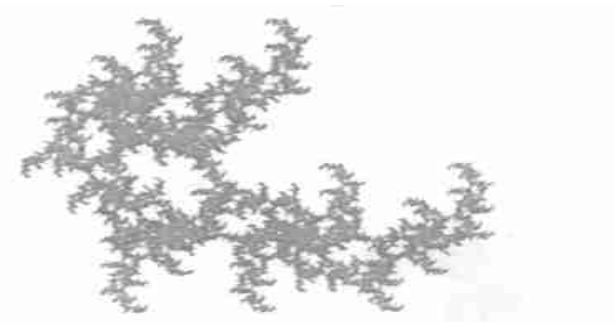


图 7 藤类植物模拟

示例 5: 三维植物的模拟。
该示例是把蕨类植物的 IFS 码扩展到三维空间, 扩展后的 IFS 码如表 6 所示, 绘制的分形图如图 8 所示。
实践证明, 该方法简单易用, 关键的是要根据所模拟的景物, 利用几何变换设计出 IFS 码。

表 6 一种三维植物的 ISFP 码						
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
0	0.104	0.104	0.850	0	0	0
0	-0.235	0.235	0.025	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0.196	0.196	-0.025	0	0	0
0.200	0.186	0.186	0.850	0.186	0.186	0.850
0	0	0	0	0.196	0.196	-0.025
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.235	0.235	-0.025
0	0	0	0	0.104	0.104	-0.850
0	0	0	0	0	0	0
0	0.8	0.7	0.7	0.8	0.7	0.9
0	0	0	0	0	0	0
0.10	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15

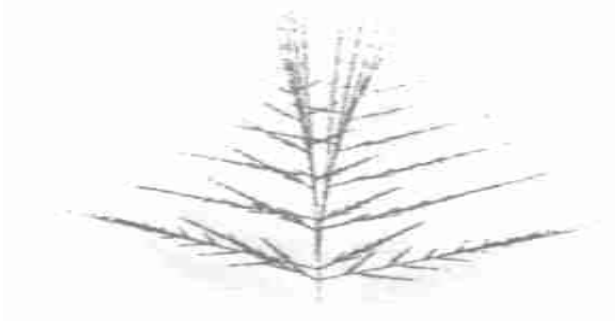


图 8 三维植物模拟

参考文献:

[1] Barnsley M F. Fractals Everywhere [M] . San Diego: Academic Press, 1993.
[2] Fisher Y. Fractal Image Compression: Theory and Application [M] . New York: Springer-Verlag, 1995.
[3] 陈守吉, 张立明. 分形与图象压缩 [M] . 上海: 上海科技教育出版社, 1998.
[4] James D Foley. 计算机图形学原理及实践 [M] . 北京: 机械工业出版社, 2002.
[5] Richard S. Wright J. OpenGL 超级宝典 [M] . 北京: 人民邮电出版社, 2001.

Parameter Design of IFS in Fractal

YAN Yu—bao

(Department of Computer Science and Technology, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: The theory of Iterated Function Systems (IFS) was concisely described in this paper. The technique of constructing Fractal image was given. The parameter design and control, the number of functions affecting shape of fractal image, and the probability of the attractor of IFS were discussed. In the end, IFS was introduced to the computer graphics as a theoretical basis for conformation some 2D and 3D fractal modelings.
Key words: fractal image; Iterated Function Systems; IFS parameters; probability