

文章编号: 1005-8893 (2004) 01-0049-04

联想记忆离散 Hopfield 神经网络的样本容量和吸引域

郭淑娟

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 对用于联想记忆的外积型设计离散 Hopfield 神经网络, 给出了记忆样本容量与样本间 Hamming 距离以及神经元数目的具体关系, 并论证了其在实际应用中的合理性。同时给出了样本的吸引域半径与样本的具体关系。特别地, 对于样本正交的情况得到了两个推论。

关键词: 离散 Hopfield 神经网络; Hamming 距离; 样本容量; 吸引域

中图分类号: O 233

文献标识码: A

近年来神经网络的研究受到了生物、物理、数学、电子工程等学科专家的广泛关注, 神经网络迅速发展成一门交叉学科。美国生物物理学家 J. J. Hopfield 在 1982 年^[1]和 1984 年^[2]提出了仿人脑神经网络反馈模型 (称为 Hopfield 神经网络模型), 将能量函数引进对称 Hopfield 神经网络中, 使网络稳定性的研究有了明确的判据, 并证明了一个互连单元的神经网络系统将达到能量损耗最小的原理, 就是说, 系统的动态特性保证了系统将趋于某一极小值。

利用多元的 Hopfield 神经网络的多吸引子及其吸引域, 则可实现信息的联想记忆功能。神经网络通过模拟人的神经系统处理信息的原理, 使机器具有类似的信息处理能力。联想记忆是人脑的一种重要形式, 研究用神经网络实现联想记忆, 一方面可为进一步探索人脑的记忆奥秘提供启示, 另一方面也为神经网络模型在信息处理、模式识别等领域的研究打下基础^[3]。神经网络联想记忆的研究开始于上世纪 50 年代, 早期的研究集中在线性模型, 存储的信息和用来检索的信息通过线性映射实现转换; 目前人们普遍感兴趣的是利用 Hopfield 神经网络模型实现联想记忆, 它是非线性动力学网络, 更符合人脑的信息处理方式。

假设神经元的输出为二值硬函数, 这种神经网络

称为 Hopfield 神经网络, 它主要运用于联想记忆。网络方程为

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n w_{ij} v_i(t) + I_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$v_j(t+1) = \text{sgn}[x_j(t)], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中

$$\text{sgn}[x_j(t)] = \begin{cases} 1 & x_j(t) \geq 0 \\ -1 & x_j(t) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

这里 $x_j(t)$ 为 t 时刻第 j 个神经元的输入状态, $v_j(t)$ 为输出状态, I_j 为外界输入, w_{ij} 为第 i 个神经元到第 j 个神经元的连接权。(1)、(2) 式常写成矩阵形式

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{WV}(t) + \mathbf{I} \quad (1')$$

$$\mathbf{V}(t+1) = \text{sgn}\mathbf{X}(t) \quad (2')$$

当网络从一个初始态 $t=t_0$, $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t_0)$, $\mathbf{V}=\mathbf{V}(t_0)$ 开始, 经过有限的时间间隔 Δt (设为 1), 网络的输出不再发生变化, 这些输出称为网络的稳定点, 用公式表示为

$$\mathbf{V}(t+1) = \mathbf{V}(t) \quad (4)$$

并称 $\mathbf{V}(t_0)$ 被吸引到 $\mathbf{V}(t)$ 上。

为了利用离散 Hopfield 神经网络实现联想记忆, 首先需要将要记忆的信息分解成若干个神经

收稿日期: 2003-10-08

作者简介: 郭淑娟 (1964-), 女, 河南辉县人, 副教授, 主要从事数学教学与应用数学研究。

元,然后再运用适当的方式确定神经元之间的连接权,使要记忆的信息成为网络的稳定点,存储于网络中。要求网络能够从不完整的或模糊的信息出发,联想出记忆中的某个完整的、清晰的信息,即被吸引到某个稳定点上^[4,5]。

假设有 m 个记忆样本矢量 $V^k, k=1, 2, \dots, m$ (m 称为样本的容量), 每个样本有 n 个神经元, 即 $V^k \in \{-1, 1\}^n$, 根据神经生物学中的 Hebb 学习律^[6], 神经元之间的连接权是通过不断学习创造出来的, 连接权的学习律正比于两个被连接的神经细胞的活动状态值的乘积^[7]。令第 i 个神经元到第 j 个神经元的连接权

$$w_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^m v_i^k v_j^k & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

或写成矩阵形式, 令

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$W = [V^1, V^2, \dots, V^m] \begin{bmatrix} V^{1T} \\ V^{2T} \\ \vdots \\ V^{mT} \end{bmatrix} - mU \quad (5')$$

这里 U 为单位矩阵。这种权的设计称为外积型设计。特别地, 当 V^1, V^2, \dots, V^m 两两正交, 即 $V^{iT} \cdot V^k = 0$ 时, 称为外积型正交设计。

用 $d_H(V^l, V^k)$ 表示两个矢量 V^l, V^k 中不同分量的个数, 称为 V^l 与 V^k 之间的 Hamming 距离^[8]。易验证 Hamming 距离满足距离的 3 个条件, 即恒正性, 对称性和三角不等式, 其中三角不等式可表述为: 对 $V^l, V^k, V^p \in \{-1, 1\}^n$, 有等式

$$d_H(V^l, V^k) \leq d_H(V^l, V^p) + d_H(V^p, V^k) \quad (6)$$

本文的第 1 部分在以上文献的基础上, 进一步对样本容量, 样本的吸引域半径与样本间的 Hamming 距离, 以及样本的神经元数目进行研究, 得出了更精确的公式。本文的第 2 部分对第 1 部分的公式进行了合理性分析。

1 主要结果

下面假定 $I_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ 。

定理 1 若 V^1, V^2, \dots, V^m 为 m 个记忆样本矢量, 记

$$\alpha = \frac{\min \{d_H(V^i, V^j) \mid i, j = 1, 2, \dots, m\}}{n} \quad (7)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1/2$, 则当

$$m < \frac{2n(1-\alpha)}{1+n(1-2\alpha)} \quad (8)$$

时, V^1, V^2, \dots, V^m 均为网络的稳定点。

证 对于输入 $V(t) = V^l$, 由 (7) 式得

$$\beta_i = V^{iT} \cdot V^l \begin{cases} \leq n-2\alpha n & i \neq l \\ = n & i = l \end{cases}$$

$$WV^l = [V^1, V^2, \dots, V^m] \begin{bmatrix} V^{1T} \\ V^{2T} \\ \vdots \\ V^{mT} \end{bmatrix} V^l - mUV^l =$$

$$[V^1, \dots, V^l, \dots, V^m] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} - mV^l =$$

$$[V^1, \dots, V^l, \dots, V^m] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} + mV^l =$$

$$(n-m)V^l + \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq l}^m v_i^j \beta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1, j \neq l}^m v_n^j \beta_j \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \sum_{j=1, j \neq l}^m v_i^j \beta_j \leq \left| \sum_{j=1, j \neq l}^m v_i^j \beta_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq l}^m |\beta_j| \leq (m-1)n(1-2\alpha)。$$

因而, 只要 $n-m > (m-1)n(1-2\alpha)$, 即 $m < \frac{2n(1-\alpha)}{1+n(1-2\alpha)}$, 就有

$$V(t+1) = \text{sgn}[WV^l] = V^l = V(t)$$

因而 V^l 是网络的稳定点, 由 V^l 的任意性即得结论。

推论 若样本 V^1, V^2, \dots, V^m 彼此正交, 则只要 $m < n$, 样本均为网络的稳定点。

证 当 V^1, V^2, \dots, V^m 彼此正交时, $d_H(V^i, V^j) = n/2$ 。

在定理 1 中取 $\alpha=1/2$, 则 (8) 式就成为 $m < n$.

定理 2 设 V^1, V^2, \dots, V^m 是 m 个记忆样本, 满足 (7)、(8) 式, V 是一个取值 1 或 -1 的 n 维向量, 记

$$\mu = d_H(V, V^l) \quad (9)$$

则当

$$\mu < \frac{n}{2m} [1 - (m-1)(1-2\alpha)] - \frac{3}{2} \quad (10)$$

时, V 将被吸引到 V^l 上.

证 先证, 对于 $k=1, 2, \dots, m$, 且 $k \neq l$ 有

$$d_H(V^k, V) \geq n\alpha - \mu$$

若不然 $d_H(V^k, V) < n\alpha - \mu$, 由 (6) 式

$$d_H(V^k, V^l) \leq d_H(V^k, V) + d_H(V, V^l) < (n\alpha - \mu) + \mu = n\alpha \text{ 与 (7) 矛盾.}$$

设 $\gamma_k = V^{kT} \cdot V$, 则

$$\gamma_l = n - 2\mu$$

$$\gamma_k \leq n - 2(n\alpha - \mu) = (1 - 2\alpha)n + 2\mu, k \neq l$$

将 V 输入网络, 得到

$$WV = [V^1, V^2, \dots, V^m] \begin{bmatrix} V^{1T} \\ V^{2T} \\ \vdots \\ V^{mT} \end{bmatrix} V - mUV =$$

$$[V^1, \dots, V^l, \dots, V^m] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_l \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} - mV =$$

$$[V^1, \dots, V^l, \dots, V^m] \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \gamma_l \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} \right) -$$

$$m[V^l + (V - V^l)] = (\gamma_l - m)V^l + \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k V^k - m(V - V^l) \right]$$

上面最后一个等式第二部分的第 i 个分量是

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k v_i^k - m(v_i - v_i^l) \leq$$

$$\left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k v_i^k - m(v_i - v_i^l) \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k |v_i^k| + m|v_i - v_i^l| \leq$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \gamma_k + 2m \leq (m-1)[n(1-2\alpha) + 2\mu] + 2m$$

考虑到 $\gamma_l = n - 2\mu$, 因而当

$$n - 2\mu > (m-1)[n(1-2\alpha) + 2\mu] + 2m$$

$$\text{即 } \mu < \frac{n}{2m} [1 - (m-1)(1-2\alpha)] - \frac{3}{2}$$

时, $\text{sgn}(WV) = V^l$, 因而 V 被吸引到 V^l 上.

记

$$\mu_0 = \frac{n}{2m} [1 - (m-1)(1-2\alpha)] - \frac{3}{2} \quad (11)$$

因而 V 被吸引到 V^l 上的条件是 $d_H(V, V^l) < \mu_0$, 满足条件的 V 的集合称为 V^l 的吸引域, μ_0 为吸引域的半径.

推论 若样本 V^1, V^2, \dots, V^m 彼此正交, 则样本的吸引域半径

$$\mu_0 = \frac{n}{2m} - \frac{3}{2} \quad (12)$$

证 只要在 (11) 式中取 $\alpha=1/2$, 即可得 (12) 式.

2 讨论

在定理 1 中, (8) 式可改写为

$$m < \left[1 - \frac{n-1}{2n(1-\alpha)} \right]^{-1} \quad (13)$$

从 (13) 可知, α 越大, 即样本间的 Hamming 距离拉得越大, 网络的存储容量就越大.

另外 (8) 式也可改写成

$$n > \frac{m}{1 - (m-1)(1-2\alpha)} \quad (14)$$

即对于需要存储的样本数 m 和样本间距, 只要神经元数目 n 足够大, 这些样本都可以被记忆.

如果将 (8) 式写成

$$m < \frac{1-\alpha}{\frac{n+1}{2n} - \alpha} \quad (15)$$

则可知 $\frac{n+1}{2n} - \alpha > 0$, 从而得

$$\alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad (16)$$

对于定理 2, 为使 $\mu_0 > 0$, 需要 $\alpha > \frac{n(m-2)+3m}{2(m-1)n}$, 在实际应用中 n 往往比 m 大得多, 所以 (16) 式或 $\alpha \leq 1/2$ 可以被满足.

参考文献:

- [1] Hopfield J J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities, proc [J]. Natl

- Acad Sci, 1982, 79, 2 554—2 558.
- [2] Hopfield J J. Neurons with Graded Response have Collective Computational Properties like those of two State Neurons, proc [J]. Natl Acad Sci, 1984, 81, 3 088—3 092.
- [3] 汤同奎, 邵惠鹤. 神经网络在控制中的应用 [J]. 江苏石油化工学院学报, 1998, 10 (1): 45—49.
- [4] 金聪. 离散 Hopfield 双向联想记忆神经网络的稳定性分析 [J]. 自动化学报, 1999, 25 (5): 606—609.
- [5] 高莹, 熊志欢. 判定离散 Hopfield 神经网络稳定性的新方法 [J]. 武汉大学学报 (理学版), 2002, 48 (1): 18—22.
- [6] Hebb D O. The Organization of Behavior [M]. New York: John Wiley, 1949.
- [7] 阮炯, 顾凡及, 蔡志杰. 神经动力学模型方法和应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [8] 张立明. 人工神经网络的模型及其应用 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 1994.

Sample Size and Domain of Attraction of Discrete—Time Hopfield Neural Network for Associative Memory

GUO Shu—juan

(Department of Information Science, Jiangsu Polytecnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: We studied discrete—time Hopfield neural network based on vector product. As a result, we got the formula of sample size, Hamming distance and the number of neurons. Its rationality in practice was discussed. Furthermore, we got the fomula of the domain of attraction and samples. Particularly, as samples are perpendicular, we got two corollaries.

Key words: discrete—time Hopfield neural network; Hamming distance; sample size; domain of attraction