第16卷第1期 江苏工业学院学报 Vol. 16 No. 1
2004年3月 JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY Mar. 2004

文章编号：1005－8893（2004）01－0056－03

抛物型方程组正解的存在性及界的迭代估计

刘玉清
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：证明了一类抛物型方程组正解的存在性，通过迭代得到解的上、下界估计，这种估计依赖于一个预先给定的方程。

关键词：正解；上下解；迭代估计
中图分类号：O 175.2　　**文献标识码**：A

本文讨论如下方程组：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f(u,v),x\in\Omega,t>0 \\ v_t-\Delta v=g(u,v),x\in\Omega,t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),x\in\Omega \\ u(x,t)=v(x,t)=0,x\in\partial\Omega,t>0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界的有界区域，$u_0(x)$，$v_0(x)$ 满足相容性条件。上述方程组或与其相应的椭圆方程组正解的存在性以及解具有什么样的性质一直吸引着人们的研究。对特定的 f，g，已经有许多很好的结果，如文献［1～3］。文献［4］对形为 $-\Delta u=p(x)u^{-\gamma}+q(x)u^{\alpha}$，$x\in\Omega$，$u|_{\partial\Omega}=0$ $(0<\gamma<\frac{1}{n}\ (n>2)$，$0<\alpha<1$，$p$，$q\geqslant 0)$ 的方程的正解存在性进行了讨论，本文借鉴其思想来讨论方程组（1），不仅可以证明正解的存在性，还可以进行解的估计，所得结果具有一般性。

1　正解存在性

本文恒作如下假设：①f，g：$[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，连续，关于两个变元分别单调增。②存在 $\sigma_i\in(0,1)$，$i=1,2$，使 $\lim\limits_{u\to 0_+}\frac{f(u,u)}{u^{\sigma_1}}=A>0$，$\lim\limits_{u\to 0_+}\frac{g(u,u)}{u^{\sigma_2}}=B>0$，并记：$\mu_1=\sigma_1\wedge\sigma_2$，$\mu_2=\sigma_1\vee\sigma_2$，这里，$\sigma_1\wedge\sigma_2=\min(\sigma_1,\sigma_2)$，$\sigma_1\vee\sigma_2=\max(\sigma_1,\sigma_2)$。

引理1：设①②成立，则存在正数 m，M，使 u 有界时，

$$mu^{\sigma_1}\leqslant f(u,u)\leqslant Mu^{\sigma_1},\ mu^{\sigma_2}\leqslant g(u,u)\leqslant Mu^{\sigma_2} \quad (2)$$

证明：由②知，存在 $\eta>0$，使 $0<u<\eta$ 时，

$\frac{A}{2}u^{\sigma_1}<f(u,u)<\frac{3A}{2}u^{\sigma_1}$，

$\frac{B}{2}u^{\sigma_2}<g(u,u)<\frac{3B}{2}u^{\sigma_2}$，

设 u 的上界是 η_0，当 $\eta\leqslant u\leqslant\eta_0$ 时，由①，f，g 有界，因此，存在正数 m'，M' 使

$m'u^{\sigma_1}\leqslant f(u,u)\leqslant M'u^{\sigma_1}$，

$m'u^{\sigma_2}\leqslant g(u,u)\leqslant M'u^{\sigma_2}$，

由此得证引理。

下面以 φ_1 记零边值 Dirichlet 问题的第一特征函数，λ_1 是第一特征值，为方便，不妨设 $\varphi_1<1$。

定理1：只要初值 $u_0(x)$，$v_0(x)$ 满足一定的光滑性条件（如：$u_0(x)$，$v_0(x)\in C^{\gamma}(\overline{\Omega})$，$\gamma\in(0,1)$），且有界、不恒等于零，方程组（1）就存在唯一有界古典正解 $(\bar{u},\bar{v})$。

证明：显然，对充分小的 δ，$(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})=(\delta\varphi_1,\delta\varphi_1)$ 是下解，（上下解及下文拟增的定义见文献［5］第3章、第5章）。再考虑上解。由于 $|\nabla\varphi_1|^2\neq 0$，因此设 $a=\inf\limits_{\partial\Omega}|\nabla\varphi_1|^2$，把区域分为不相交的两块 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，其中 $\Omega_1=\{x\in\Omega,\ |\nabla\varphi_1|^2\geqslant a/2,\ \varphi_1<\varepsilon\}$，显然 $\inf\limits_{\Omega_2}\varphi_1>0$ 即 φ_1 在

收稿日期：2003－09－08
作者简介：刘玉清（1966－），男，江苏常州人，硕士，主要从事偏微分方程方面的研究。

Ω_2 上有正下界。取 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$ $(\sigma\in(0, 1))$，由于

$\Delta(\varphi_1^\sigma) = -\sigma(1-\sigma)\varphi_1^{\sigma-2}|\nabla\varphi_1|^2 - \lambda_1\sigma\varphi_1^\sigma$，因此，当 $x\in\Omega_1$ 时，$-\Delta(K\varphi_1^\sigma) \geqslant K\sigma(1-\sigma)\varphi_1^{\sigma-2}|\nabla\varphi_1|^2 \geqslant \frac{aK}{2}\sigma(1-\sigma)\varphi_1^{\sigma-2}$，对充分大的 K，由 (2) 式显然有：

$\frac{aK}{2}\sigma(1-\sigma)\varphi_1^{\sigma-2} \geqslant MK^{\mu_2}\varphi_1^{\sigma\mu_1} \geqslant f(K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$ 及 $g(K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$，而当 $x\in\Omega_2$ 时，由于 φ_1 有正下界，因此 K 充分大时，

$-\Delta(K\varphi_1^\sigma) = K\lambda_1\sigma\varphi_1^\sigma \geqslant MK^{\mu_2}\varphi_1^{\sigma\mu_1} \geqslant f(K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$ 及 $g(K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$，于是，$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$ 是方程组 (1) 的上解。由于方程组 (1) 是拟增的，由文献 [5] 的证法（第 5 章第 1、2 节）可知，方程组 (1) 有唯一有界正解。

2　界的迭代估计

由定理 1 知道，方程组 (1) 的正解是有界的，即 $\delta\varphi_1\leqslant u, v\leqslant K\varphi_1^\sigma$，但下面我们用迭代法来作界的估计，这样的估计得到的界依赖于一个预先给定的方程。由定理 1 的证明可以知道，对适当的 $\delta>0$ 和适当的 $K>0$，$(u, v) = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_1)$，$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$ 也分别是与方程组 (1) 相应的椭圆方程组的下解和上解，因此可以考虑把相应的椭圆方程组的解来作为方程组 (1) 的上解与下解，并且不必知道椭圆组解的表达式，只要知道其解的上下界。

定义算子 $T_i(u, v)$ 为下述问题的解 w_i $(i=1, 2)$：

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = f(u, v), & x\in\Omega \\ -\Delta w_2 = g(u, v), & x\in\Omega \\ w_1 = w_2 = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

则 T_i 是 L_p 上紧算子。由下述引理（该引理也被文献 [4] 所引用）。

引理 2[6]：设 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$，若存在常数 $k\geqslant 0$，使

$-\Delta u + ku \geqslant 0$，$x\in\Omega$，

$u\geqslant 0$，$x\in\Omega$

则 $u\equiv 0$，或存在常数 $c>0$，使 $u(x)\geqslant c\,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$，$x\in\Omega$ 知：必存在常数 $l>0$，使 $T_i(\varphi_1, \varphi_1)\geqslant l\varphi_1$[4]，因此可令

$I_i = \sup\{s \mid T_i(\varphi_1, \varphi_1)\geqslant s\varphi_1\}$，$i=1, 2$，并令 $I=I_1\wedge I_2$，就利用 I 来给出界的估计。

定理 2：若方程组 (1) 的初值满足：

$u_0(x)$，$v_0(x) \geqslant \left(\frac{m}{M}\right)^{1/(1-\mu_2)} I^{1/(1-\alpha)}\varphi_1$，则其解也有同样的下界。此处，当 $I<1$ 时 $\alpha=\mu_2$，当 $I\geqslant 1$ 时 $\alpha=\mu_1$。

证明：构造迭代序列：

$$u_n = T_1(u_{n-1}, v_{n-1}),$$
$$v_n = T_2(u_{n-1}, v_{n-1}) \tag{3}$$
$$(u_0, v_0) = (\tilde{u}, \tilde{v}) = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_1)$$

则

$-\Delta u_1 = f(\delta\varphi_1, \delta\varphi_1) \geqslant m\delta^{\sigma_1}\varphi_1{}^{\sigma_1} = \frac{m}{M}M\delta^{\sigma_1}\varphi_1{}^{\sigma_1} \geqslant \frac{m}{M}\delta^{\sigma_1} f(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{m}{M}\delta^{\sigma_1}(-\Delta T_1(\varphi_1, \varphi_1))$

因此，$u_1 \geqslant \frac{m}{M}\delta^{\sigma_1} T_1(\varphi_1, \varphi_1) \geqslant \frac{m}{M}\delta^{\sigma_1} I\varphi_1$

同理，$v_1 \geqslant \frac{m}{M}\delta^{\sigma_2} I\varphi_1$，因此，$u_1$，$v_1 \geqslant \frac{m}{M}\delta^{\mu_2} I\varphi_1$。

由数学归纳法可以证得：

$$u_n,\ v_n \geqslant r^{1+\mu_2+\cdots+\mu_2^{n-1}}\delta^{\mu_2^n} I^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}}\varphi_1 \tag{4}$$

这里 $r=m/M$。

也容易证明，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是单调增序列，并有上界，因此椭圆组有解且分别大于等于 u_n，v_n，在 (4) 式中取极限可得解的下界为 $r^{1/(1-\mu_2)} I^{1/(1-\alpha)}\varphi_1$，于是定理得证。

定理 3：若方程组 (1) 的初值满足：$0<u_0(x)$，$v_0(x) \leqslant (C_0M)^{1/(1-\mu_2)}$ 则其解也有同样的界。其中 C_0 依赖于空间维数 n 和区域 Ω。

证明：仍然考虑迭代序列 (3)，只不过现在初值取 $(u_0, v_0) = (\tilde{u}, \tilde{v}) = (K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma)$，于是，

$$\begin{cases} -\Delta u = f(K\varphi_1^\sigma, K\varphi_1^\sigma) \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

则由解的最大模估计及引理 1（不妨设 $\varphi_1<1$），

$$0\leqslant u_1 \leqslant C_0MK^{\sigma_1}\varphi_1^{\sigma\sigma_1} \leqslant C_0MK^{\mu_2}\varphi_1^{\sigma\mu_1}$$

同理，$0\leqslant v_1\leqslant C_0MK^{\mu_2}\varphi_1^{\sigma\mu_1}$。用数学归纳法可以证明：

$$0\leqslant u_n,\ v_n \leqslant (C_0M)^{1+\mu_2+\cdots+\mu_2^{n-1}} K^{\mu_2^n}\varphi_1^{\sigma\mu_2^n} \tag{5}$$

同样，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 是单调减序列，由文献

[5]（第 5 章第 1、3 节），椭圆方程组的解存在且分别小于等于每个 u_n，v_n，在（5）式取极限即得上界也是方程组（1）的解的上界。

参考文献：

[1] 梁学信．一类半线形抛物型方程组解的 blow—up [J]．应用数学学报，1997，20 (1)：146—150.

[2] 尼考里·塔夫列．具有次线性和超线性项的非线形椭圆方程组最小正解的存在性 [J]．应用数学和力学，2000，21 (3)：253—259.

[3] Mario Zuluaga. Nonzero and Positive Solutions of a Superlinear Elliptic System [J]. Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus, 2001, 37: 63—70.

[4] 孙义静，吴绍平．具有奇性的非线形椭圆方程的边值问题 [J]．数学年刊，2000，21 (4)：427—436.

[5] 叶其孝，李正元．反映扩散方程引论 [M]．北京：科学出版社，1990.

[6] Brezis H, Nirenberg L. Minima Locaux Relatifs a C^1 et H^1 [J]. C R Acad Sci Paris, 1993, 317: 465—472.

Existence of Positive Solutions and Iterative Estimate of Bound on Parabolic Systems

LIU Yu—qing

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In this paper, we have demonstrated a parabolic system and derived the existence of its positive solutions and the iterative estimate of bound by using solutions of elliptic systems as uppersolutions or lowersolutions. This kind of estimation is determined by one equation pregiven.

Key words: positive solutions; uppersolutions and lowersolutions; iterative estimate