文章编号：1005－8893（2004）01－0059－02

Greub－Rheinboldt 不等式的推广

汪明瑾
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：利用分析和代数的方法，给出了 Greub－Rheinboldt 不等式的一种推广形式，丰富了在统计领域有重要应用价值的 Kantorovich 型不等式。

关键词：不等式；正定 Hermite 阵；特征值
中图分类号：O 211.5　　**文献标识码**：A

有关正定矩阵及其特征值的不等式是不等式领域的重要组成部分，这种类型的不等式在许多方面有着重要的应用，特别是它在概率论与数理统计领域的作用尤其突出。Kantorovich 型不等式是这种类型不等式的一个重要代表。近年来国内外的许多学者纷纷给出 Kantorovich 型不等式的推广、延拓及其应用[1~6]。如下的不等式称为 Greub－Rheinboldt 不等式[7]。

Greub－Rheinboldt 不等式：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$S$ 和 s 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值，T 和 t 分别为 $\boldsymbol{B}$ 的最大和最小特征值。则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})^2}\leqslant\frac{(ST+st)^2}{4STst}$$

Greub－Rheinboldt 不等式是一个重要的 Kantorovich 型不等式。它在许多方面都有重要应用。本文给出了 Greub－Rheinboldt 不等式的一种推广形式，进一步丰富了 Kantorovich 型不等式。

首先给出如下的引理。

引理：若实数 $a>0$，$b>0$，$p>0$，$q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$。等号成立的充要条件为 $a^p=b^q$。

证明：由于 $y=-\ln x$ 为严格凹函数，我们有

$$-\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\leqslant-\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q$$

即 $ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$

且等号成立的充要条件为 $a^p=b^q$。

现在我们给出本文的主要结果。

定理：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$S$ 和 s 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值，T 和 t 分别为 $\boldsymbol{B}$ 的最大和最小特征值。p 和 q 为满足 $p>0$，$q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的任意实数。则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^q\ (\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^p}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})^{p+q}}\leqslant\frac{(ST+st)^{pq}}{p^qq^p\ (Ss)^p\ (Tt)^q}$$

证明：设 λ_1，…，λ_n 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，μ_1，…，μ_n 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则存在酉阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\Lambda U}$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{MU}$。这里 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}$（$\lambda_1$，…，$\lambda_n$），$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}$（$\mu_1$，…，$\mu_n$）。记 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ux}$，

$$p_i=\frac{|y_i|^2}{\sum_{i=1}^n|y_i|^2},\ i=1,\ \cdots,\ n$$

则

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})^q\ (\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x})^p}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{ABx})^{p+q}}=$$

$$\frac{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{Ux})^q\ (\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{Ux})^p}{(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\Lambda MUx})^{p+q}}=$$

收稿日期：2003－12－10
基金项目：江苏省教育厅自然科学研究基金资助（02KJD110002）；江苏工业学院科技基金资助
作者简介：汪明瑾（1961－），男，安徽歙县人，硕士，副教授，主要研究方向为概率统计。

$$\frac{(y^*A^2y)^q\ (y^*M^2y)^p}{(y^*AMy)^{p+q}}=\frac{\left(\frac{y^*A^2y}{y^*y}\right)^q\left(\frac{y^*M^2y}{y^*y}\right)^p}{\left(\frac{y^*AMy}{y^*y}\right)^{p+q}}=$$

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i)^q(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i)^p}{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_ip_i)^{p+q}}$$

问题归结为对 $p_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，证明

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i)^q(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i)^p}{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_ip_i)^{p+q}}\leqslant\frac{(ST+st)^{pq}}{p^qq^p\ (Ss)^p\ (Tt)^q}$$

对任意的 $i=1,\cdots,n$，有 $\frac{\lambda_i}{\mu_i}\geqslant\frac{s}{T}$，$\frac{\mu_i}{\lambda_i}\geqslant\frac{t}{S}$，所以 $(T\lambda_i-s\mu_i)\ (S\mu_i-t\lambda_i)\ \geqslant 0$ 展开，得

$$(ST+st)\ \lambda_i\mu_i\geqslant Tt\lambda_i^2+Ss\mu_i^2$$

两边乘 p_i 并求和得

$$(ST+st)\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_ip_i\geqslant Tt\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i+Ss\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i=$$

$$\frac{1}{p}\left[\ (pTt\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i)^{\frac{1}{p}}\right]^p+\frac{1}{q}\left[\ (qSs\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i)^{\frac{1}{q}}\right]^q\geqslant$$

$$p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}\ \left[Tt\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i\right]^{\frac{1}{p}}\ \left[Ss\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i\right]^{\frac{1}{q}}$$

所以

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2p_i)^q(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2p_i)^p}{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_ip_i)^{p+q}}\leqslant\frac{(ST+st)^{pq}}{p^qq^p\ (Ss)^p\ (Tt)^q}$$

即

$$\frac{(x^*A^2x)^q\ (x^*B^2x)^p}{(x^*ABx)^{p+q}}\leqslant\frac{(ST+st)^{pq}}{p^qq^p\ (Ss)^p\ (Tt)^q}$$

推论 1[1]：（Greub－Rheinboldt 不等式）设 **A**、**B** 为 $n\times n$ 正定 Hermite 阵，$AB=BA$，S 和 s 分别为 **A** 的最大和最小特征值，T 和 t 分别为 **B** 的最大和最小特征值。则对任意非零向量 **x**，有

$$\frac{x^*A^2xx^*B^2x}{(x^*ABx)^2}\leqslant\frac{(ST+st)^2}{4STst}$$

证明：在定理中令 $p=q=2$，即得结论。

推论 2：（Kantorovich 不等式的推广）设 **M** 为 $n\times n$ 正定为正定 Hermite 阵，λ_1 和 λ_n 分别为 **M** 的最大和最小特征值，p 和 q 为满足 $p>0$，$q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的任意实数。则对任意非零向量 **x**，有

$$\frac{(x^*Mx)^q\ (x^*M^{-1}x)^p}{(x^*x)^{p+q}}\leqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^{pq}}{p^qq^p\ (\sqrt{\lambda_1\lambda_n})^p\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\right)^q}$$

证明：在定理中令 $A=M^{\frac{1}{2}}$，$B=M^{\frac{1}{2}}$，则 **A** 的特征值为 $\sqrt{\lambda_1}$，$\cdots$，$\sqrt{\lambda_n}$，$B=A^{-1}$ 的特征值 μ_1，$\cdots$，μ_n 分别为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$，$\cdots$，$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$，此时定理中的 $T=\sqrt{\lambda_1}$，$t=\sqrt{\lambda_n}$，$S=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$，$s=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$，定理的结论

$$\frac{(x^*A^2x)^q\ (x^*B^2x)^p}{(x^*ABx)^{p+q}}\leqslant\frac{(ST+st)^{pq}}{p^qq^p\ (Ss)^p\ (Tt)^q}$$

化为

$$\frac{(x^*Mx)^q\ (x^*M^{-1}x)^p}{(x^*x)^{p+q}}\leqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^{pq}}{p^qq^p\ (\sqrt{\lambda_1\lambda_n})^p\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\right)^q}$$

参考文献：

[1] 汪明瑾．Kantorovich 不等式的一种推广［J］．江苏石油化工学院学报，2002，14 (1)：51－52.

[2] Wang Songgui and Shao. J Constrained Kantorovich Inequalities and Relative Efficiency of Least Squares [J]. J Multi Analysis，1992，42：284－289.

[3] Bloomfield P，Watson G S. The Inefficiency of Least Squares [J]. Biometrika，1975，62：121－128.

[4] Wang Mingjin. The Mean Inequality of Random Variables [J]. Mathematical Inequalities & Applications，2002，5 (4)：755－763.

[5] 汪明瑾．一个关于正定矩阵的不等式［J］．江苏工业学院学报，2003，15 (3)：63－64.

[6] Wang Songgui，Yang Hu. Kantorovich－tpye Inequalities and the Measures of Inefficiency of the GLSE [J]. Acta Mathematicae Aoplicatae Sinica，1989，5：372－381.

[7] 王松桂，贾忠贞．矩阵论中不等式［M］．合肥：安徽教育出版社，1994. 144－153.

An Extention of Greub－Rheinboldt Inequalities

WANG Ming－jin

(Department ofInformation Science，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213016，China)

Abstract：In this paper，we prove an inequality which includes Greub－Rheinboldt inequality as its special cases.

Key words：inequality；positive Hermitian matrix；eigenvalue