

文章编号: 1005 - 8893 (2004) 03 - 0009 - 05

# 厚壁圆筒在动载荷作用下的应力分析<sup>\*</sup>

蒋学东<sup>1</sup>, 李小平<sup>2</sup>

(1. 江苏工业学院 机械工程系, 江苏 常州 213016; 2. 常州信息职业技术学院, 江苏 常州 213015)

**摘要:** 应用应力波理论, 采用围道积分的方法, 对受均匀内压的圆柱形空腔的应力进行分析, 得到在圆孔中作用一个突加载荷时平面问题的解。再根据火炮内膛压力的变化, 拟合成动态载荷的曲线方程, 由应力波在炮管中的传播以及在内外管壁的反射的理论, 通过计算机的优化计算, 获得了径向应力和环向应力沿管壁的分布, 并对厚壁圆筒在动态载荷下的应力分析作一些说明。

**关键词:** 应力波; 围道积分; 突加载荷

**中图分类号:** O 347.4

**文献标识码:** A

随着科学技术的不断发展, 新的科学、技术和先进的工艺方法已逐步应用于生产实践, 而在军事方面对于这一点更为突出。在我国火炮或坦克炮身管的设计方面, 经过科学工作者几十年的辛勤劳动, 在火炮身管自紧等方面都取得了很大成绩。但在许多方面还局限在静态的厚壁圆筒的理论上, 而在动态情况下, 材料的动态性能、动应力和动应变都比静态情况下有提高。简单地利用静态方法, 按照第3强度理论或第四强度理论, 加上经验上的修正值, 虽然能满足其安全性, 但对于武器的轻便和灵活等方面的要求有一定的距离。下面我们对火炮身管的局部问题提出一些新的设想, 并做了一些初步的理论工作。

## 1 厚壁圆筒在动载荷下的应力分析

### 1.1 受均匀内压圆柱形空腔的应力分析

均匀弹性介质中, 半径为  $a$  的圆柱形空腔受均匀内压  $p(t)$  的作用而激发的瞬间波 (图1), 由于扰动源的对称性, 是轴对称问题。若考虑平面应变的情况, 则有  $u_z = u = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} = 0$ 。问题的控制方程仍由连续方程、运动方程和材料的本构方

程组成。

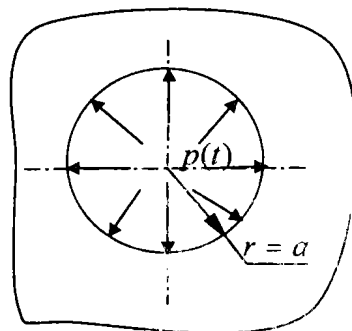


图1 受内压的无限大介质中圆柱形空腔

Fig. 1 Cylinder cavity within infinite - media created by inner presses

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{C_d^2} \quad (r > a, t > 0) \quad (1)$$

$$(r, 0) = (r, 0) \quad (r > a) \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r, t) = 0 \quad (t > 0) \quad (3)$$

$$r(a, t) = p(t) \quad (t > 0) \quad (4)$$

其中  $\phi$  为标量位移势函数, 对 (1) 式进行

Laplace 变换得:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r, s) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k_d^2 = 0$$

\* 收稿日期: 2003 - 11 - 13

作者简介: 蒋学东 (1966 - ), 男, 江苏常州人, 硕士。

其中  $k_d = \frac{s}{C_d}$ ,  $C_d$  为一维应变下的波速,  $C_d^2 = \frac{+2\mu}{0}$ , 通解为

$$\bar{u}(r, s) = A(s) I_0(k_d r) + B(s) K_0(k_d r) \quad (5)$$

其中  $I_0$  和  $K_0$  为修正的零阶的第 1 类和第 2 类 Bessel 函数, 当  $r$  很大时有如下关系

$$I_0(k_d r) \sim \frac{e^{k_d r}}{\sqrt{2 k_d r}}$$

$$K_0(k_d r) \sim \frac{\sqrt{2 k_d r}}{e^{k_d r}}$$

由 (3) 式进行 Laplace 变换为  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}(r, s) = 0$ , 则 (5) 式中  $A(s) = 0$ , 因此解为

$$\bar{u}(r, s) = B(s) K_0(k_d r) \quad (6)$$

由非零位移  $u = u_r = \frac{\partial}{\partial r}$ , 应力与势函数之间

关系  $\sigma_r = \nabla^2 u + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ ,  $\sigma_\theta = \nabla^2 u + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$ ,

$z = (r + i\theta)$ ,  $r$  的 Laplace 变换为

$$\bar{\sigma}_r = (+2\mu) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

由 Bessel 函数的性质, 将上式代入 (6) 式可得

$$\bar{\sigma}_r = [ (+2\mu) k_d^2 K_0(k_d r) + 2\mu k_d K_1(k_d r) / r ] B(s)$$

对 (4) 式进行 Laplace 变换  $\bar{\sigma}_r(a, s) = \bar{p}(s)$  可确定

$$B(s) = \frac{\bar{p}(s)}{(+2\mu) F^*(s)}$$

其中  $F^*(s) = \frac{2k_d K_1(k_d a)}{D^2 a} + k_d^2 K_0(k_d a)$ ,

$$D^2 = \frac{+2\mu}{\mu}.$$

势函数  $u$ 、径向应力  $\sigma_r$ 、位移函数  $\mu$  的拉氏变换为

$$\bar{u}(r, s) = \frac{\bar{p}(s) K_0(k_d r)}{(+2\mu) F^*(s)} \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_r(r, s) = \frac{\frac{2K_1(k_d r)}{D^2 r} + k_d K_0(k_d r)}{F^*(s)} \bar{p}(s) \quad (8)$$

$$\bar{\mu}(r, s) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = - \frac{\bar{p}(s) K_1(k_d r) k_d}{(+2\mu) F^*(s)} \quad (9)$$

当载荷  $p(t)$  给出以后, 求 (7)、(8)、(9)

式 Laplace 逆变换可以得到径向应力  $\sigma_r$ 、环向应力和位移  $\mu$  等, 但该工作仍很困难, 一种是 Selberg<sup>[1]</sup>所采用的方法, 另一种是 Miklowity<sup>[2,3]</sup>建议的围道积分。

以突加载荷为例, 采用围道积分来求解上述问题。

设  $p(t) = p_0 H(t)$ , 则  $\bar{p}(s) = p_0/s$ , 因此

$$\bar{u}(r, s) = \frac{p_0 K_0(k_d r)}{(+2\mu) F^*(s)}$$

$$\bar{\sigma}_r(r, s) = \frac{p_0 \left[ \frac{2K_1(k_d r)}{D^2 r} + k_d K_0(k_d r) \right]}{s F^*(s)}$$

$$\bar{\mu}(r, s) = - \frac{p_0 K_1(k_d r) k_d}{(+2\mu) s F^*(s)}$$

从上述几式可看出  $s=0$  为上述函数的极点, 也是  $K_n(k_d a)$  ( $n$  为整数) 的对数分支点, 另外可以判断  $F^*(s)$  在  $\text{Re}(s)$  大于零的右半平面上不能有零点。由此得到  $Br$  路径可在的任何位置。上述几式在  $\text{Re}(s) > 0$  上处处解析, 以径向应力  $\sigma_r$  为例

$$\sigma_r(r, s) = \begin{cases} 0 & t < \frac{r-a}{C_d} \\ \frac{p_0}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\frac{2K_1(k_d r)}{D^2 r} + k_d K_0(k_d r)}{s F^*(s)} s t ds & t > \frac{r-a}{C_d} \end{cases}$$

选择图 2 的围道,  $(-i\infty, i\infty)$ , 其中  $s = e^{i\theta}$  的幅角, 分支的切口沿负实轴。在图示围道上被积函数是解析的。

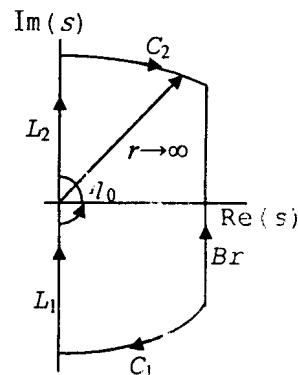


图 2 围道

Fig. 2 Surround-way

由 Cauchy - Goursat 定理  $\oint_{Br} = \oint_{C_1} + \oint_{L_1} +$

可以证明在  $C_1$  和  $C_2$  上积分值为零。

在  $L_1$  上  $s = e^{-\frac{1}{2}} = -i$ , 在  $L_2$  上  $s = e^{\frac{1}{2}} = i$ 。

$$r(r, s) / L_1 + L_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{\frac{2}{D^2 r} K_1 \left( \frac{i r}{C_d} \right) + \frac{i}{C_d} K_0 \left( \frac{i r}{C_d} \right) e^{i t}}{\frac{2}{D^2 a} K_1 \left( \frac{i a}{C_d} \right) + \frac{i}{C_d} K_0 \left( \frac{i a}{C_d} \right)} \right] d \quad (10)$$

在  $L_1$  上  $s = e^i$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , 对很小的  $z$ , 由  $K_0(z) = -\ln z$ ,  $K_1(z) = 1/z$  得

$$r(r, t) \big|_{r=a} = \frac{a^2}{2} \quad (11)$$

径向应力的值由 (10) 式和 (11) 式叠加, 对  $r$  在  $r=a$  处进行验算

$$r(r, t) = \frac{a_0}{2} \operatorname{Im}(\cos t + i \sin t) \frac{d}{2} + \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2} \frac{\sin t}{d} + \frac{a_0}{2}$$

由狄利克勒积分<sup>[4]</sup>

$$\frac{\sin t}{d} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -\frac{1}{2} & (t < 0) \end{cases}$$

可简单得到  $r(r, t) = a_0 H(t)$ , 与边界条件吻合。

图 3 是由计算机计算径向应力  $r$  所得的结果 (曲线按  $\nu = 0.25$  算得)<sup>[5]</sup>。

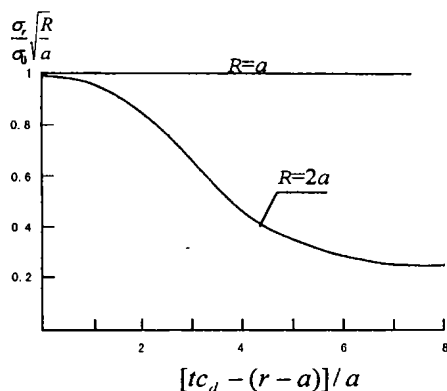


图 3 受突加载荷时  $r$  沿径向位移的分布

Fig. 3 The distribution of  $r$ , along radius distance received by a sudden load

## 1.2 在实际载荷下的应力分析

采用最小二乘法, 拟合火炮膛底火药力的曲

线, 得到:

$$P(t) = \begin{cases} 0e^{-0.0876(40-t)} & t \in [0, 39] \mu s \\ 0 \cos[0.1650(t-41)] & t \in (39, 43] \mu s \\ 0e^{-0.0562(t-42)} & t \in (43, \infty) \mu s \end{cases}$$

$$r(r, t) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{K_1(k_d r)}{D^2 r} + \frac{k_d K_0(k_d r)}{C_d} \frac{1}{F^*(s)} p(s) e^{st} ds$$

其中  $\overline{p(s)}$  为  $p(t)$  进行 Laplace 变换所得

$$\overline{p(s)} = 0e^{-3.504 \frac{1 - e^{(0.0876-s)39}}{s - 0.0876}} + \frac{0s \cos 0.33}{s^2 + 0.1650^2} (e^{-39s} - e^{-43s}) + \frac{0.1650}{s^2 + 0.1650^2} (e^{-43s} - e^{-39s}) \sin 0.33 + 0e^{2.6304 \frac{-43(s+0.0562)}{s+0.0562}}$$

当  $s = 0.0876$ ,  $s = \pm 0.1650i$  和  $s = -0.0562$  时为被积函数的奇点, 围道积分采用图 4 所示的围道

$$B_r = C_1 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + C_2 + L_3 + L_4 + L_5 + C_2 = 2L_3 + 2L_4 + 2L_5$$

求  $r$ , 可用  $s = e^i$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $0$ ,  $= 0.0876$ ,

$$r(r, t) \big|_{r=a} = 0e^{-3.504 \frac{\frac{2}{D^2 r} K_1(\frac{r}{C_d}) + \frac{1}{C_d} K_0(\frac{r}{C_d})}{\frac{2}{D^2 a} K_1(\frac{a}{C_d}) + \frac{1}{C_d} K_0(\frac{a}{C_d})}} e^{st}$$

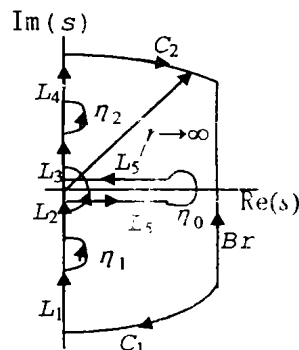


图 4 围道

Fig. 4 Surround-way

求  $r$  时  $s = i + e^i$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $0$ ,  $= 0.0876$ , 通过汉克尔函数和修正的第 2 类 Bessel 函数的关系得

$$r(r, t)|_0 = \frac{0}{4(\frac{2}{1} + \frac{2}{2})} \{ [A(\frac{1}{3} + \frac{2}{4}) - B(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})] \cos t + [A(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) + B(\frac{1}{3} - \frac{2}{4})] \sin t \}$$

其中

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{D^2 a} J_1 \left\{ \frac{a}{C_d} \right\} - \frac{1}{C_d} J_0 \left\{ \frac{a}{C_d} \right\} \\ 2 &= \frac{2}{D^2 a} Y_1 \left\{ \frac{a}{C_d} \right\} - \frac{1}{C_d} Y_0 \left\{ \frac{a}{C_d} \right\} \\ 3 &= \frac{2}{D^2 r} J_1 \left\{ \frac{r}{C_d} \right\} - \frac{1}{C_d} J_0 \left\{ \frac{r}{C_d} \right\} \\ 4 &= \frac{2}{D^2 r} Y_1 \left\{ \frac{r}{C_d} \right\} - \frac{1}{C_d} Y_0 \left\{ \frac{r}{C_d} \right\} \\ A &= \cos 0.33 (\cos 39^\circ - \cos 43^\circ) - \sin 0.33 (\sin 39^\circ + \sin 43^\circ) \\ B &= \cos 0.33 (\sin 39^\circ - \sin 43^\circ) + \sin 0.33 (\cos 39^\circ + \cos 43^\circ) \end{aligned}$$

在  $L_3$  上, 取  $s=i$ ,  $(0, 0.165 \ 0)$

$$\begin{aligned} r(r, t) / L_3 &= \frac{0}{2} \lim_{0 \rightarrow 0.165 \ 0} \frac{0}{0} \frac{1}{\frac{2}{1} + \frac{2}{2}} \{ [A(\frac{1}{3} + \frac{2}{4}) - B(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})] \cos t + [A(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) + B(\frac{1}{3} - \frac{2}{4})] \sin t \} / d \\ A_1 &= \frac{1}{2 + 0.087 \ 6^2} (e^{-3.504} + 0.087 \ 6 \cos 39^\circ + \sin 39^\circ) + \frac{0.056 \ 2 \cos 43^\circ - \sin 43^\circ}{0.056 \ 2^2 + 2^2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^2 \cos 0.33 (\sin 39^\circ - \sin 43^\circ) + \sin 0.33 (\cos 39^\circ + \cos 43^\circ) / \\ B_1 &= \frac{0.087 \ 6 \sin 39^\circ - \cos 39^\circ}{2 + 0.087 \ 6^2} + \\ &\quad \frac{0.056 \ 2 \sin 43^\circ + \cos 43^\circ}{2 + 0.056 \ 2^2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^2 \cos 0.33 (\sin 39^\circ - \sin 43^\circ) + \sin 0.33 (\cos 39^\circ + \cos 43^\circ) / \\ &= 0.165 \end{aligned}$$

对于  $u_r(r, t)$  及  $(r, t)$  也可用类似的方法求得。

### 1.3 应力波的反射和叠加<sup>[6]</sup>

设  $\vec{r} = f(r, t)$  为由里向外的应力波传播时所产生的径向应力, 则  $\vec{r} = -f(r, t - T/2)$  为由外向里的应力波传播时所产生的径向应力(图 5)。

第  $k$  个周期  $n = k - 1$

$$r = \frac{k-2}{n=0} \rightarrow \frac{k-1}{n=0} \rightarrow \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned} t &= [(k-1)T, (k-1)T + T/2] \\ r &= \frac{k-1}{n=0} \rightarrow \frac{k-1}{n=0} \rightarrow \frac{k}{n} \\ t &= [(k-1)T + T/2, kT] \end{aligned}$$

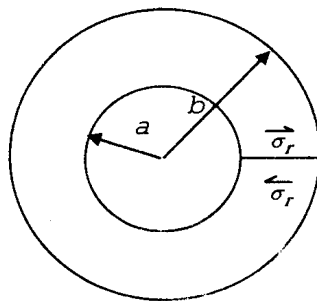


图 5 径向应力传播示意图

Fig. 5 The sketch map of distribution of radius stresses

### 1.4 数值计算的简单说明

在计算广义积分时, 采用了拉盖尔求积公式。在半无限区间  $[a, \infty)$  内的积分

$$\int_a^\infty g(t) dt = \int_0^\infty g(t+a) dt = \sum_{i=1}^n w_i e^{x_i} g(a+x_i)$$

为提高计算精度, 即当  $n=15$  时, 采用高斯方法, 将上式分解为

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b g(t) dt + \int_b^\infty g(t) dt$$

对于零阶和一阶 Bessel 函数采用相应的多项式表达式, 计算精度绝对误差  $| \epsilon | < 10^{-8}$ ; 对于整数阶柱汉克尔函数利用相应的逆推公式, 可推出  $Y_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ )。

### 1.5 计算结果

在数值计算中, 取  $E=210 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.25$ , 波速  $C_d=5 \ 660 \text{ m/s}$ , 厚壁圆筒内径  $a=62.20 \text{ mm}$ , 外径  $b=130.52 \text{ mm}$ , 径向相对应力与相对时间的关系计算如图 6。

图 6 中, 曲线 1、2、3、4 分别是在  $\frac{r-a}{b-a}=0, 0.2, 0.4, 0.6$  处径向相对应力的变化, 到达最大值时间分别为  $41 \mu\text{s}, 43.4 \mu\text{s}, 45.8 \mu\text{s}, 48.2 \mu\text{s}$ , 最大径向相对应力  $\sigma_r / \sigma_0$  分别为  $1, 0.51, 0.36$  和  $0.176$ , 曲线 5 在  $(r-a)/(b-a)=1$  处径向相对应力始终为零。

最大径向应力和最大环向应力沿径向位移的分布分别见图 7, 图 8。

## 2 结果分析

用弹性动力学计算厚壁圆筒 (以  $b/a=2$  为

例),在圆筒内壁  $r = 0$ ,而  $1.66 \sigma_0$ ,在外壁

$0.67 \sigma_0$ 。在动态载荷作用下径向应力和环向应力都要提高,特别是内壁所受的环向最大应力在  $2.3 \sigma_0$  左右,远高于静态值。在突加载荷的作用下,最大环向应力将达到  $2.4 \sigma_0 \sim 2.5 \sigma_0$ ,而载荷上升越平稳,其最大环向应力越小,当载荷上升很平缓时,径向和环向应力与静态值基本吻合。

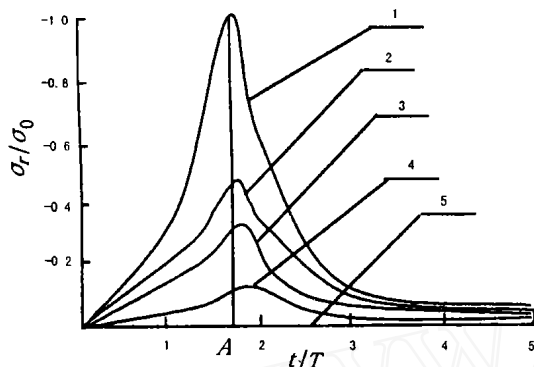


图6 在各截面上径向相对应力的变化

Fig. 6 The change of radius relative stresses at every section

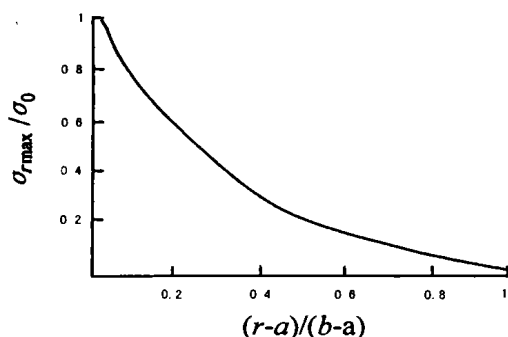


图7 最大径向应力沿径向位移的分布

Fig. 7 The distribution of maximum radius stresses along radius distance

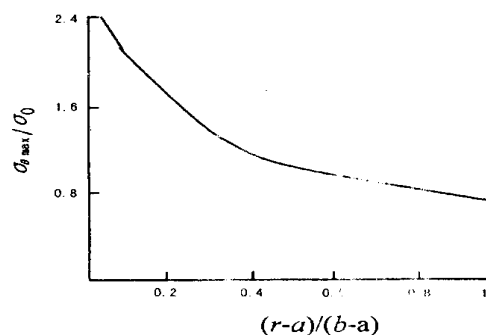


图8 最大环向应力沿径向位移的分布

Fig. 8 The distribution of maximum ring stresses along radius distance

另外当波前到达之前,应力值为零,且应力在波头所到之处具有强间断效应。对于环向应力则与静态应力符号相反。在波头所到处,  $\sigma_r = \sigma_0/3$ ,这与用特征线法所得结果一致,这些都是强间断效应所致。采用弹性应力波理论解决厚壁圆筒在动载荷作用下的应力分布的问题有一定的理论价值和实际意义。

#### 参考文献:

- [1] Selberg H L. Transient Compression Waves from Spherical and Cylindrical Cavities[J]. Arkiv for Fysik, 1952, 5: 97 - 108.
- [2] Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves And Waveguides[M]. Amsterdam: North - Holland Publishing Company, 1978. 277 - 288.
- [3] Miklowitz J. Plane - Stress Unloading Waves Emanating From a Suddenly Punched Hole In a Stretched Elastic Plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1960, 3: 165 - 171.
- [4]《现代工程数学手册》编委会. 现代工程数学手册[M]. 第一卷. 武汉:华中工学院出版社, 1985.
- [5]王礼立. 应力波基础[M]. 北京:国防工业出版社, 1985.
- [6]龚育宁. 弹性应力波理论[M]. 南京:华东工学院出版社, 1988.

### Analysis of the Stress Created by Sudden Load in the Cylinder

J IANG Xue - dong<sup>1</sup>, L I Xiao - ping<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China; 2. Changzhou College of Information Technology, Changzhou 213015, China)

**Abstract:** This paper presents a surround - integral approach to the analysis of the stress created by well - distributed pressure in the cylinder in order to calculate the stress on its internal surface by theory of stress waves when a sudden load is produced. According to the changing pressure of the cannon's inner face, the curve equation of dynamic load is worked out. With the aid of the theory of stress wave, the distribution of radius stresses and ring stresses was obtained by the optimized calculation in the computer, and some explanations are given about stresses created by dynamic load in the cylinder.

**Key words:** stress waves; surround - integral; sudden load