文章编号：1005-8893（2004）03-0041-02

一类三阶非线性系统的全局稳定性*

康慧燕
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：运用"类比法"，构造了一类三阶非线性时滞系统的李雅普诺夫函数，从而推出了这类系统的零解全局渐进稳定的充分条件。

关键词：非线性时滞系统；李雅普诺夫函数；全局稳定
中图分类号：O 175　　文献标识码：A

文献 [1~5] 中研究了具有一般意义的三阶非线性系统的全局稳定性，其中文献 [5] 中研究了如下一类三阶非线性系统：

$$\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+f(x)\dot{x}+h(x)=0,\quad h(0)=0 \qquad (1)$$

其中 $g(y)$ 连续，$f(x)$，$h(x)$ 有连续的导数，通过构造 (1) 式的李雅普诺夫函数为：

$$V(x,y,z)=a\int_0^x h(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2}f(x)y^2+\frac{1}{2}(ay+z)^2+a\int_0^y[g(\eta)-a]\eta\mathrm{d}\eta \qquad (2)$$

其中 $\dot{x}=y$，$\dot{y}=z$ 得到如下结论：

引理　如果存在常数 $a>0$，$d>0$，使得① $g(y)-a\geqslant 0$，② $f(x)\geqslant d$，③ $0<h'(x)<ad$，④ $f'(x)y\leqslant 0$，则系统 (1) 的零解全局渐近稳定。

本文主要研究如下一类三阶非线性时滞系统：

$$\dddot{x}(t)+g(\dot{x}(t))\ddot{x}(t)+f(x(t))\dot{x}(t)+h(x(t))\varphi(x(t-\tau))=0 \qquad (3)$$

其中 $g(x)$ 连续，$f(x)$，$h(x)$，$\varphi(x)$ 有连续的导数，且 $h(0)\varphi(0)=0$，$\tau\geqslant 0$，得到：

定理　如果存在常数 $a>0$，$d>0$，使得① $g(y)-a-2\tau\geqslant 0$，② $f(x)\geqslant d+3a\tau$，③ $0<h'(x)\varphi(x)+h(x)\phi(x)<ad$，④ $f'(x)y\leqslant 0$，⑤ $|h(x)\phi(u)|\leqslant 2a$，则系统 (3) 的零解全局渐近稳定。

证明：将系统 (3) 化成等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=y(t)\\ \dot{y}(t)=z(t)\\ \dot{z}(t)=-h(x(t))\varphi(x(t))-f(x(t))y(t)-\\ \qquad g(y(t))z(t)+\\ \qquad h(x(t))\int_{-\tau}^{0}\phi_x(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s\end{cases} \qquad (4)$$

运用"类比法"，由 (2) 式得 (4) 式的李雅普诺夫函数为

$$V(x,y,z)=a\int_0^x h(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta+h(x)\varphi(x)y+\frac{1}{2}f(x)y^2+\frac{1}{2}(ay+z)^2+a\int_0^y[g(\eta)-a]\eta\mathrm{d}\eta+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t}a^2y^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

对照系统 (1) 与 (3)，由引理以及 $\int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t}a^2y^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\geqslant 0$ 可得 $V(x,y,z)$ 正定。又由条件①~⑤得

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(4)}=\;&ah(x(t))\varphi(x(t))\dot{x}(t)+\\ &h'_x(x(t))\dot{x}(t)\varphi(x(t))y(t)+\\ &h(x(t))\phi_x(x(t))\dot{x}(t)y(t)+\\ &h(x(t))\varphi(x(t))\dot{y}(t)+\frac{1}{2}f'_x(x(t))\dot{x}(t)y^2(t)+\end{aligned}$$

* 收稿日期：2003-12-23
作者简介：康慧燕（1973-），女，内蒙古包头人，硕士，研究方向为微分方程的稳定性。

$f(x(t))y(t)\dot{y}(t)+[ay(t)+z(t)][a\dot{y}(t)+\dot{z}(t)]+a[g(y(t))-a]y(t)\dot{y}(t)+\int_{-\tau}^{0}[a^2y^2(t)-a^2y^2(t+s)]ds\leqslant -[g(y(t))-a]z^2(t)-[af(x(t))-h'_x(x(t))\varphi(x(t))-h(x(t))\varphi'_x(x(t))-\frac{1}{2}f'_x(x(t))y(t)]y^2(t)+\int_{-\tau}^{0}|ay(t)+z(t)||h(x(t))\varphi'_x(x(t))||y(t+s)|ds+a^2y^2(t)\tau-\int_{-\tau}^{0}a^2y^2(t+s)ds$

又$\int_{-\tau}^{0}|ay(t)+z(t)||h(x(t))\varphi'_x(x(t+s))||y(t+s)|ds\leqslant\int_{-\tau}^{0}2|ay(t)+z(t)||ay(t+s)|ds\leqslant\int_{-\tau}^{0}[(ay(t)+z(t))^2+a^2y^2(t+s)]ds\leqslant[a^2y^2(t)+2|ay(t)||z(t)|+z^2(t)]\tau+\int_{-\tau}^{0}a^2y^2(t+s)ds\leqslant 2a^2y^2(t)\tau+2z^2(t)\tau+\int_{-\tau}^{0}a^2y^2(t+s)ds$

故 $\dot{V}|_{(4)}\leqslant -[g(y(t))-a-2\tau]z^2(t)-[af(x(t))-h'_x(x(t))\varphi(x(t))-h(x(t))\varphi'_x(x(t))-3a^2\tau-\frac{1}{2}f'_x(x(t))y(t)]y^2(t)\leqslant -[g(y(t))-a-2\tau]z^2(t)+\frac{1}{2}[f'_x(x(t))y(t)]y^2(t)\leqslant 0$

即 $\dot{V}|_{(4)}$常负，且当 $\dot{V}|_{(4)}=0$ 时，$-[g(y(t))-a-2\tau]z^2(t)-[af(x(t))-h'_x(x(t))\varphi(x(t))-h(x(t))\varphi'_x(x(t))-\frac{1}{2}f'_x(x(t))y(t)-3a^2\tau]y^2(t)=0$，从而有 $y(t)=0$，代入系统（4）得 $z(t)=0$，$x(t)=0$，故 $\dot{V}|_{(4)}=0$ 不含系统（4）的非零解的整条轨线。

下证系统（4）的所有正半轨线有界，任取点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 和如此大的正数 L 和 N，使得 P 位于由不等式 $V(x, y, z)<L$ 及 $|y|<N$ 所确定的区域 D 内，显然 D 是有界的区域。由 $\dot{V}(x, y, z)\leqslant 0$，知轨线上的点当 $t>0$ 时若要从区域 D 内离开，就必须通过这个区域边界的平面部分，即有这样的瞬时 T，使得 $|y(T)|=N$。但从不等式 $V(x, y, z)<L$ 及 $V(x, y, z)$ 的表达式可得 $\frac{1}{2}(ay+z)^2<L$，即

$$-ay-\sqrt{2L}<z<-ay+\sqrt{2L}\qquad(5)$$

如果 $y=N$，则由（5）式右边不等式得 $z<-aN+\sqrt{2L}$，如果 $y=-N$，则由（5）式左边不等式得 $z>aN-\sqrt{2L}$，这就是说当 N 足够大时，有 $z\times\mathrm{sgn}y=\dot{y}\times\mathrm{sgn}y<0$，由此可知系统（4）的轨线交区域 D 边界的平面部分（即 $y=\pm N$）时自外向内穿过，所以系统（4）每条正半轨线有界，由文献［6］知系统（4）的零解是全局渐近稳定的。

推论　如果存在常数 $a>0$，使得 $g(y)-a-2\tau\geqslant 0$，$0<h'(x)\varphi(x)+h(x)\varphi'(x)<ab$，$|h(x)\varphi'(u)|\leqslant 2a$，则系统 $\dddot{x}(t)+g(\dot{x}(t))\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+h(x(t))\varphi(x(t-\tau))=0$，$b>0$ 的零解全局渐近稳定。

参考文献:

［1］Reissing R, Sansone G, Conti R. Non-Linear Differential Equations of Higher Order［M］. Leyden: Noordhoff Inteinational Publishing, 1974.

［2］王联，王慕秋．一类三阶非线性系统李雅普诺夫函数构造分析［J］．应用数学学报，1983，6（3）：309-323.

［3］吴檀，邹长安，车克健．一类三阶非线性系统的全局稳定性［J］．应用数学学报，1997，20（3）：438-441.

［4］贾建文．一类三阶非线性系统全局稳定性的 Liapunov 函数构造［J］．应用数学学报，1999，22（4）：621-623.

［5］康慧燕．关于三阶非线性系统全局稳定性两个定理的推广［J］．应用数学，2001，14（增刊）：7-9.

［6］王联，王慕秋．非线性常微分方程定性分析［M］．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1987. 265.

Global Stability of a Class of Third-Order Nonlinear System

KANG Hui-yan

(Department of Information Science, Jangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: This paper has made up a Liapunov's function of a class of third-order nonlinear delay system by use of "comparision method", thereby deriving sufficient conditions of the global stability of the nonlinear system.

Key words: nonlinear delay system; Liapunov's function; global stability