

文章编号: 1005- 8893 (2004) 03- 0043- 03

一个分段光滑系统中的混沌吸引子^{*}

巢小刚

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 为了研究不连续系统中的混沌行为, 观察一个由比较器控制的, 带有模拟开关的 RLC 非线性电路模型, 此电路系统的行为可以用一个分段光滑映象来描述。对该映象进行了大量的数值研究, 发现无论改变参数中的哪一个, 当系统的控制参数超出某一阈值后系统的相空间都出现一个混沌吸引子。运用数值计算的方法在相平面中得到系统的混沌吸引子, 而后对这个混沌吸引子进行数值研究, 发现它具有两方面的特征: ①它是不连续边界象集的归宿; ④具有分数维。

关键词: 电路; 混沌吸引子; 不连续边界

中图分类号: O 322. 12

文献标识码: A

可以说一切实际系统都是非线性的, 因此非线性系统特有的混沌运动是自然界的普遍行为之一。除基础科学的各个领域外, 人们也日益关注工程系统中的混沌现象。例如含有阈值保护安全装置的电路, 含有电容充放电的电路, 含有可控开关的电路, 等等。这类电路系统通常采用分段光滑的数学模型描述。近年来, 这类电路尤其是一些数字电路已受到人们的广泛关注。本文报道了作者在一个用比较器控制的、有模拟开关的 RLC 电路简化模型中观察到的混沌吸引子^[1~4]。

1 系 统

我们讨论的系统是图 1 所示的带模拟开关 S 的 RLC 电路, S 受一个比较器 O 控制。

在方波信号源的激励下, 当流过电感上的电流在电阻 R 上产生的电压小于参考电位 V_{ref} 时, 比较器的输出使得模拟开关 S 断开, 电阻 R_c 不起作用; 而 R 上电压大于 V_{ref} 时, 模拟开关闭合, 使得电阻 R_c 接入网络。在模拟开关接通与断开的两种情况下, 对应的等效电路如图 2, 图 3 所示。Dutta^[5] 等人首先证明此电路可用一组不连续二阶自治常微分方程来描述, 然后从不连续系统的普遍分析

得到一个描述此类二维不连续系统的普遍无量纲 Poincaré 映象:

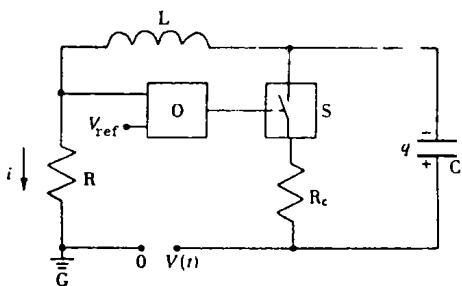


图 1 比较器控制的有模拟开关的电路

Fig. 1 Electronic circuit with an analog switch controlled by a comparator

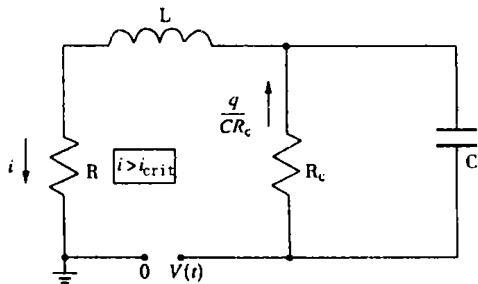


图 2 模拟开关接通时图 1 的等效电路

Fig. 2 Equivalent circuit of Fig. 1 with the analog switch on

* 收稿日期: 2004- 05- 24

基金项目: 江苏工业学院科技基金资助

作者简介: 巢小刚 (1977-), 男, 江苏常州人, 硕士生。

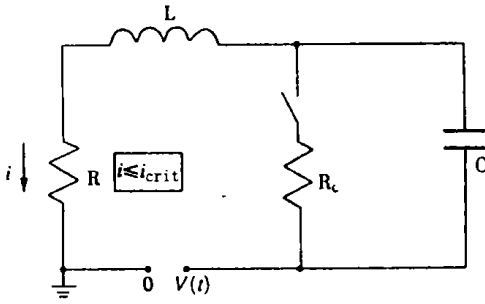


图 3 模拟开关断开时图 1 的等效图

Fig. 3 Equivalent circuit of Fig. 1 with the analog switch off

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_{1x}(x_n, y_n) = a_{on}x_n + y_n + p_{on} \\ y_{n+1} = f_{1y}(x_n, y_n) = b_{on}x_n \\ x_{n+1} = f_{2x}(x_n, y_n) = a_{off}x_n + y_n + p_{off} \\ y_{n+1} = f_{2y}(x_n, y_n) = b_{off}x_n \end{cases} \begin{matrix} x \leq 0 \\ \\ x > 0 \end{matrix} \quad (1)$$

并且说明映象 (1) 的行为在许多情况下与电路方程的行为定性一致。映象 (1) 中的 a , b , p 可看作分别对应于电路参数的不连续无量纲参量, x , y 可看作分别对应于电路中电容两端电压和通过电感的电流的无量纲变量。作者对映象 (1) 作了大量的数值研究, 结果表明在很广泛的参数区域内, 不管是改变 a , b , p 中的哪一个, 当控制参数超过某一阈值后, 系统的相空间出现一个混沌吸引子。研究结果表明, 混沌吸引子具有以下两个特征: ① 它是不连续边界象集的归宿; ④ 是一个分形。由于篇幅所限, 本文取 $p_{off} = -6.0$, $b_{on} = b_{off} = 0.9$, $a_{off} = -0.3$, $a_{on} = 0.15$, p_{on} 为控制参量。

2 混沌吸引子与边界映象集

数值调研结果表明, 当 $p_{on} > 0.739$ 时, 系统的相空间出现一个混沌吸引子。图 4 显示了 $p_{on} = 0.74$ 时系统的混沌吸引子, 此图是略去从相平面 $x \in [-5, 5]$, $y \in [-2, 2]$ 范围内均匀选取的 100 个初值出发的前 18 000 次迭代, 然后记录 2 000 次得到。作者在上述参数条件下, 在 $x = 0$, $y \in [-14.0, 5.0]$ 的一段边界上均匀选取 1 000 个初值, 然后从每个初值记录 50 次迭代, 就得到图 5 显示的“边界 50 次象集”。图中的中文数字显示了边界象的阶数。这里对 y 取值的限制是为了避免发散。如果从图 5 所示的相平面部分任一点出发, 去掉足够的瞬态, 然后记录 100 000 次以上的迭代, 都会得到大致与图 5 中那许多黑色三角形同样的图形, 即去掉前若干次象的边界象集, 或称

“边界象集的归宿”。例如图中的长箭头就显示了从初值点 (5, 5) 出发, 经过 54 次迭代后进入边界象集的情况。以后的迭代将描绘出“边界象集的归宿”。实际上边界的前 4 阶象已经决定了混沌吸引子的大致边界。图 6 中的各种三角形符号表示从这几阶象分割开的上部和右部相空间区域中任一点出发, 经过 (如箭头附近的阿拉伯数字所示) 不同次数的迭代后都会进入被这几阶象分割开的下部和左部相空间区域, 然后进入图中较大的黑点所示的混沌吸引子。这说明混沌吸引子就是边界象集的归宿。数值研究的结果表明这是本系统中各种参数组合下出现的混沌吸引子的共同特征。这与数学家的普遍结论是一致的^[6, 7]。

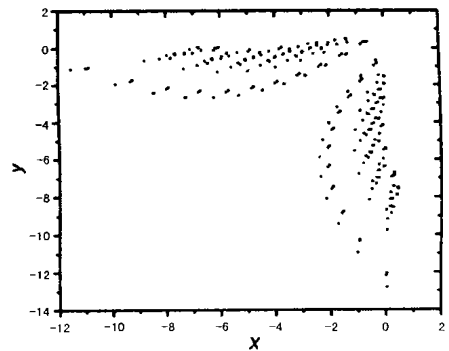


图 4 $p_{on} = 0.74$ 时系统的混沌吸引子

Fig. 4 The attractor of the system when $p_{on} = 0.74$

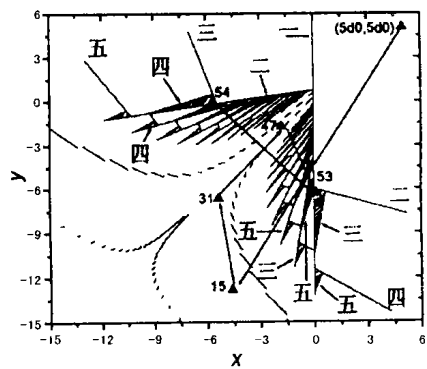


图 5 不连续边界一段的前 50 阶象集的图示

Fig. 5 The set of first 50 images of a piece of the discontinuous borderlines

3 分形

由于非线性映象的一再作用, 边界直线在迭代中不断地被拉伸、弯曲、截断、折叠或扭转, 使边界象集的归宿成为由无数个奇形怪状的线段组成的一个集合, 因此边界象集的归宿应该是一个分形。由于混沌吸引子就是边界象集的归宿, 所以混沌吸

引子也是一个分形。图 7 显示了对图 4 中的 5 万个点用盒子计数法进行分析的结果，图中 l 为标尺长度， N 为此标度下的计数。图中显示的极好的标度不变性说明图 4 显示的混沌吸引子是一个分形。拟合的直线显示它的维数为 $D=1.64 \pm 0.01$ 。

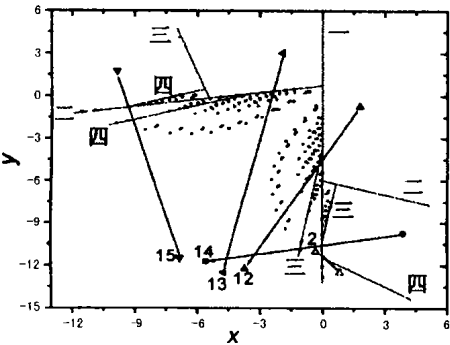


图 6 不连续边界一段的前 4 阶象集及混沌吸引子的图示
Fig. 6 The set of first 4 images of a piece of the discontinuous borderlines and the attractor

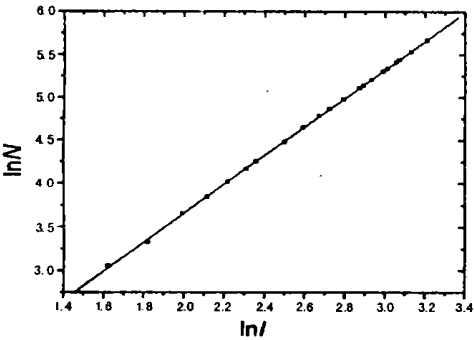


图 7 对图 4 中的 5 万个点进行分形的分数维分析的结果
Fig. 7 The result of fraction dimension of the fractal obtained by analyzing fifty thousand dots of Fig. 4

参考文献:

[1] CHUA L O, LIN T. Chaos in Digital Filters [J]. IEEE Trans Circ and Sys, 1988, 35: 648- 658.
[2] 张小鸣, 马正华. DSP 信号处理器的特点和应用 [J]. 江苏石油化工学院学报, 2001, 13 (3): 52- 56.
[3] CHUA L O, LIN T. Chaos and Fractals from Third- Order Digital Filters [J]. Inter J Circ Theo and Appl, 1990, 18: 241- 255.
[4] LIN T, CHUA L O. On Chaos of Digital Filters in the Real World [J]. IEEE Trans Circ and Sys, 1991, 38: 557- 558.
[5] DUTTA M, NUSSES H E, OTT E, et al. Multiple Attractor Bifurcation: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth System [J]. Phys Rev Lett, 1999, 83 (21): 4 281- 4 284.
[6] CHRISTIAN M. About Two- Dimensional Piecewise Continuous Noninvertible Maps [J]. Inter J Bifur & Chaos, 1996, 6: 893 - 918.
[7] MIRA C. Complex Dynamics in Two- Dimensional Endomorphism [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Method & Application, 1980, 4: 1 167- 1 187.

Chaotic Attractor in a Piecewise- Smooth System

CHAO Xiao- gang

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In order to study the chaotic behavior in the discontinuous system, a RLC nonlinear circuit model with an analogy switch was observed, which was described by a piecewise- continuous map. The system was studied through a great deal of numerical investigation, it was found that with any parameter varying, the chaotic attractor appeared on the phase plane when value of the controlling parameter was greater than some threshold value. Such a chaotic attractor was obtained on the phase plane by numerical calculation. Having been studied by means of numerical calculation, the attractor was found to own two characteristics: ① it is the end- results of the image set of the discontinuous borderline; ④it is a fractal.

Key words: electronic circuit; chaotic attractor; discontinuous borderline