第16卷第4期
2004年12月

江 苏 工 业 学 院 学 报
JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY

Vol. 16 No. 4
Dec. 2004

文章编号：1005－8893（2004）04－0060－02

关于 n 元 Ostrowski 不等式

王福利
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：给出了 n 元函数的 Ostrowski 型不等式，从一个方面推广了 Ostrowski 型不等式.

关键词：Ostrowski 型不等式；n 元函数；n 元不等式
中图分类号：O 211.5　　**文献标识码**：A

Ostrowski 不等式[1]：设连续函数 f：$[a, b]\to R$ 是 (a, b) 区间上的可微函数，$\|f'\|_\infty=\text{ess.}\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|<\infty$，则对一切 $x\in[a, b]$ 有 $\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty$。

近几年来，国际上有许多专家对 Ostrowski 型不等式进行了研究并得到了一批结果[2~9]。这些结果主要是对于不同类型的一元函数给出了相应的 Ostrowski 型不等式。本文给出了一种 n 元函数的 Ostrowski 型不等式，从一个方面推广了 Ostrowski 型不等式。

引理：设连续函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$：$[a, b]\times\cdots\times[a, b]\to R$ 是 $(a, b)\times\cdots\times(a, b)$ 区间上的可导函数，$(x_1, \cdots, x_n)\in[a, b]\times\cdots\times[a, b]$，对于任意的 $(t_1, \cdots, t_n)\in[a, b]\times\cdots\times[a, b]$，则存在与 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 有关的 θ，满足 $0<\theta<1$，使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)-f(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{i=1}^n(x_i-t_i)f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1),t_2+\theta(x_2-t_2),\cdots,t_n+\theta(x_n-t_n))$$

证明：令 $F(h)=f(t_1+h(x_1-t_1), \cdots, h(x_n-t_n))\quad 0\leqslant h\leqslant 1$

则 $F(h)$ 在 $[0, 1]$ 上满足中值定理的条件，因此存在与 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 有关的 θ，满足 $0<\theta<1$，使 $F(1)-F(0)=F'(\theta)$

即 $f(x_1, \cdots, x_n)-f(t_1, \cdots, t_n)=\sum_{i=1}^n(x_i-t_i)f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1), t_2+\theta(x_2-t_2), \cdots, \theta(x_n-t_n))$。

本文的主要结论为：

定理：设 $f(x_1,\cdots,x_n)$：$[a,b]\times\cdots\times[a,b]\to R$ 是 $(a,b)\times\cdots\times(a,b)$ 区间上的可导函数，且 $\|f_{x_i}\|_\infty=\text{ess.}\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in(a,b)\times\cdots\times(a,b)}|f'_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)|<+\infty\ (i=1, \cdots, n)$，则对一切 $(x_1, \cdots, x_n)\in[a, b]\times\cdots\times[a, b]$ 有

$$\left|f(x_1,\cdots,x_n)-\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right|\leqslant\left[\frac{\sum_{i=1}^n\|f_{x_i}\|_\infty}{4}+\frac{\sum_{i=1}^n\|f_{x_i}\|_\infty\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)。$$

证明：由于

$$f(x_1,\cdots,x_n)-\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n=$$
$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n-$$
$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n=$$
$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b[f(x_1,\cdots,x_n)-f(t_1,\cdots,t_n)]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$$

由引理知，存在与 $t_1, t_2\cdots, t_n$ 有关的 θ：

收稿日期：2004－07－05
作者简介：王福利（1963－），男，黑龙江宝清人，副教授，研究方向：集值分析与数理经济学。

$0<\theta<1$，使 $f(x_1, \cdots, x_n)-f(t_1, \cdots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-t_i) f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1), t_2+\theta(x_2-t_2), \cdots, \theta(x_n-t_n))$。因此

$$\left|f(x_1,\cdots,x_n)-\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right|=\left|\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b[f(x_1,\cdots,x_n)-f(t_1,\cdots,t_n)]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right|=$$

$$\left|\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-t_i)f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1),t_2+\theta(x_2-t_2),\cdots,\theta(x_n-t_n))\right]\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-t_i)f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1),t_2+\theta(x_2-t_2),\cdots,\theta(x_n-t_n))\right|\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\leqslant$$

$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b\sum_{i=1}^{n}|x_i-t_i|\,|f_{x_i}(t_1+\theta(x_1-t_1),t_2+\theta(x_2-t_2),\cdots,\theta(x_n-t_n))|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\leqslant$$

$$\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b\sum_{i=1}^{n}|x_i-t_i|\,\|f_{x_i}\|_\infty\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty\int_a^b\cdots\int_a^b|x_i-t_i|\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n=$$

$$\frac{1}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty\int_a^b|x_i-t_i|\,\mathrm{d}t_i=\frac{1}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty\left[\int_a^{x_i}(x_i-t_i)\mathrm{d}t_i-\int_{x_i}^b(x_i-t_i)\mathrm{d}t_i\right]=$$

$$\frac{1}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty\left[\frac{(b-a)^2}{4}+\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty}{4}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\|f_{x_i}\|_\infty\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$$

推论：若 $\|f_{x_i}\|_\infty=\mathrm{ess.}\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in(a,b)\times\cdots\times(a,b)}|f'_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)|\leqslant M<+\infty$，则对一切 $(x_1, \cdots, x_n)\in[a, b]\times\cdots\times[a, b]$ 有

$$\left|f(x_1,\cdots,x_n)-\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b\cdots\int_a^b f(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\right|\leqslant\left[\frac{n}{4}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M$$

当 $n=1$ 时定理就是 Ostrowski 不等式。

参考文献：

[1] OSTROWSKI A. über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert [J]. Comment Math Hel, 1938, 10: 226—227.

[2] CERONE P, DRAGOMIR S S. Midpoint Type Rules from an Inequalities Point of View, in Analytic—Computational Methods in Applied Mathematics [M]. New York: CRC Press, 2000. 135—200.

[3] DRAGOMIR S S. The Ostrowski's Integral Inequality for Lipschitzian Mappings and Applications [J]. Comp and Math with Appl, 1999, 38: 33—37.

[4] DRAGOMIR S S. On the Ostrowski's Inequality for Mappings of Bounded Variation and Applications [J]. Math Ineq & Appl, 2001, 4 (1): 33—40.

[5] DRAGOMIR S S. Ostrowski's Inequality for Monotonous Mappings and Applications [J]. J KSIAM, 1999, 3 (1): 127—135.

[6] DRAGOMIR S S, WANG S. A New Inequality of Ostrowski's Type in L1—norm and Applicationsto Some Special Means and to Some Numerical Quadrature Rules [J]. Tamkang J of Math, 1997, 28: 239—244.

[7] DRAGOMIR S S, WANG S. Applications of Ostrowski's Inequality to the Estimation of Error Bounds for Some Special Means and Some Numerical Quadrature Rules [J]. Appl Math Lett, 1998, 11: 105—109.

[8] DRAGOMIR S S, WANG S. A New Inequality of Ostrowski's Type in Lp—norm and Applications to Some Special Means and to Some Numerical Quadrature Rules [J]. Indian J of Math, 1998, 40 (3): 245—304.

[9] FINK A M. Bounds on the Deviation of a Function from its Averages [J]. Czech Math J, 1992, 42 (117): 289—310.

Ostrowski Inequality with n Variables

WANG Fu—li

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In this paper, the author derived a new Ostrowski type inequality involving function with n variables.

Key words: Ostrowski inequality; function with n variables; inequality with varibles