文章编号：1005－8893（2004）04－0062－03

同时求解非线性代数方程全部根的 Newton 迭代法

黄清龙
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：讨论同时求解非线性代数方程全部根的 Newton 迭代解法及其收敛性。给出了保证该迭代法收敛的初始值的一个范围。从证明过程可见该迭代法适用于求解非线性代数方程的全部单复根。数值例子的结果是满意的。

关键词：非线性代数方程；Newton 迭代法；迭代初值；收敛性
中图分类号：O 241　　**文献标识码**：A

对于一般的函数方程的单实根，著名的 Newton 迭代法是二阶收敛的[1~3]。但由于 Newton 法只具有局部收敛性，要保证其收敛，需要选择足够精确的迭代初值。对于一般的函数方程而言，迭代初值怎样才算足够精确在 Newton 迭代法的收敛性定理中难以具体表述[2~5]。但对于 n 次代数方程而言则情况不同。设

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=0 \tag{1}$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是方程（1）的单复根，$n\geqslant 2$。

记

$$d=\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}|r_i-r_j| \tag{2}$$

文献［1］讨论同时求解非线性代数方程（1）的全部根的一个迭代法，在初值 $x_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_i^{(0)}-r_i|<\dfrac{d}{2n-1}$ 的条件下得出了收敛性。

本文讨论将 Newton 迭代法用于求解方程（1）的全部根的情形，证明当方程（1）的 n 个根的初始近似值 $x_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_i^{(0)}-r_i|<\dfrac{d}{2n-1}$ 时 Newton 迭代法

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}\quad(i=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

收敛且具有二阶敛速。

针对 n 次代数方程，我们采用不等式估计结合数学归纳法证明 Newton 迭代。式（3）的收敛性和收敛阶，这不同于以前针对一般的函数方程时 Newton 法的收敛性证明，从而给出了一个保证收敛性的初值选择范围或初值应满足的一个充分条件。由于我们的不等式估计不够精细，所以这个范围还是比较粗糙的。最后我们给出了数值例子。

1　收敛性分析

通过计算可将（3）式改写成

$$x_i^{(k+1)}-r_i=\frac{(x_i^{(k)}-r_i)\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\dfrac{x_i^{(k)}-r_i}{x_i^{(k)}-r_j}}{1+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\dfrac{x_i^{(k)}-r_i}{x_i^{(k)}-r_j}}$$

记

$$h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-r_i\quad(i=1, 2, \cdots, n;\ k=0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

$$A_i^{(k)}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{(x_i^{(k)}-r_i)}{(x_i^{(k)}-r_j)} \tag{5}$$

则得

$$h_i^{(k+1)}=\frac{A_i^{(k)}}{1+A_i^{(k)}}h_i^{(k)} \tag{6}$$

关于 Newton 迭代式（3）的收敛性和收敛阶，

收稿日期：2004－04－07
基金项目：江苏省高校自然科学研究项目（02KJD110001）
作者简介：黄清龙（1963－），男，重庆忠县人，硕士，副教授，从事应用数学和计算数学等方面的研究。

我们有下面的定理。

定理 1 当迭代初值 $x_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_i^{(0)}-r_i|<\frac{d}{2n-1}$ 时由（3）式产生的序列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 r_i，且收敛阶至少为 2。

证明 下面先通过不等式估计结合数学归纳法证明收敛性。显然，当迭代初值 $x_i^{(0)}$（$i=1, 2, \cdots, n$）满足 $|x_i^{(0)}-r_i|<\frac{d}{2n-1}$ 时，存在大于 $2n-1$ 的某个与 i 无关的常数 s 使得 $|x_i^{(0)}-r_i|\leqslant\frac{d}{s}$，从而有

$$|x_i^{(0)}-r_j|\geqslant|r_i-r_j|-|x_i^{(0)}-r_i|\geqslant(s-1)\frac{d}{s},$$

由此可得：

$$|A_i^{(0)}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{|h_i^{(0)}|\cdot s}{(s-1)\ d}\leqslant\frac{n-1}{s-1}<\frac{1}{2} \quad (7)$$

记

$$p=\frac{n-1}{s-n} \quad (8)$$

不难验证 $0<p<1$，进而由（6）式得

$$|h_i^{(1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(0)}|}{1-|A_i^{(0)}|}\leqslant p\,|h_i^{(0)}|<|h_i^{(0)}|\leqslant\frac{d}{s}$$

$$(i=1, 2, \cdots, n) \quad (9)$$

一般地，设 $|h_j^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s}$（$j=1, 2, \cdots, n$），则类似地估计可得

$$|A_i^{(k)}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{|h_i^{(k)}|\ s}{(s-1)\ d}\leqslant\frac{n-1}{s-1}<\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$|h_i^{(k+1)}|\leqslant p\,|h_i^{(k)}|\leqslant\frac{d}{s} \quad (11)$$

这里 p 仍由（8）式确定。因此由数学归纳法知当定理的条件满足时，（11）式总成立。反复利用（11）式则得 $|h_i^{(k)}|\leqslant p^k|h_i^{(0)}|\leqslant p^k\frac{d}{s}$，注意到 $0<p<1$，故当 $k\to\infty$ 时，即 $x_i^{(k)}\to r_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）。

由（10）式知：$|A_i^{(k)}|\leqslant\frac{(n-1)\ s}{(s-1)\ d}|h_i^{(k)}|$，注意到 $|A_i^{(k)}|<1/2$，故由（6）式得：

$$|h_i^{(k+1)}|\leqslant\frac{|A_i^{(k)}|}{1-|A_i^{(k)}|}|h_i^{(k)}|\leqslant\frac{(n-1)\ s}{(s-n)\ d}|h_i^{(k)}|^2$$

所以迭代式（3）是至少 2 阶收敛的。

2 数值例子

从前面收敛性的证明过程可见 Newton 迭代式（3）既可用于求解方程（1）的实根也适用于求解虚根。为了考察迭代式（3）用于实际求解非线性代数方程的情形，我们利用 MATLAB 编程计算方程 $x^7+x^5-10x^4-x^3-x+10=0$ 的全部根。这个方程取自文献［1］，其精确的根是 $r_1=2$，$r_{2,3}=\pm1$，$r_{4,5}=\pm i$，$r_{6,7}=-1\pm2i$。我们取迭代初值分别为 $x_1^{(0)}=2.2$，$x_2^{(0)}=1.2+0.1i$，$x_3^{(0)}=-0.8-0.1i$，$x_4^{(0)}=0.1+1.2i$，$x_5^{(0)}=-0.1-0.8i$，$x_6^{(0)}=-1.1+2.2i$，$x_7^{(0)}=-1.1-1.8i$。精度要求 10^{-14}，数值结果列于表 1。从表 1 可见经过 6 步迭代，所求方程的根全部都达到精度要求。

表 1 迭代法的数值计算结果

Table 1 The numerical results of the iterative method (3)

	第 1 步的结果 $x_j^{(1)}$	第 2 步的结果 $x_j^{(2)}$
$j=1$	2.063 921 439 433 44	2.008 834 190 942 69
$j=2$	1.025 409 742 995 52+0.018 708 409 060 03i	1.000 317 206 459 34+0.000 885 112 340 87i
$j=3$	−1.052 342 548 784 33+0.125 303 854 188 67i	−0.983 403 714 981 90+0.025 456 633 858 41i
$j=4$	0.034 795 470 284 14+1.046 724 666 308 63i	0.004 257 301 080 62+1.002 238 436 026 91i
$j=5$	0.091 855 944 403 41−1.051 595 603 635 75i	0.015 101 025 661 26−0.995 818 832 484 05i
$j=6$	−1.030 195 810 908 23+2.063 767 122 683 98i	−1.003 582 831 840 66+2.008 682 068 930 77i
$j=7$	−0.881 422 463 206 63−1.938 114 462 413 25i	−1.051 161 428 050 89−1.980 563 400 666 23i
	第 3 步的结果 $x_j^{(3)}$	第 4 步的结果 $x_j^{(4)}$
$j=1$	2.000 197 049 943 97	2.000 000 100 693 18
$j=2$	0.999 999 318 802 00+0.000 000 562 484 16i	1.000 000 000 000 15−0.000 000 000 000 77i
$j=3$	−0.999 224 664 872 40−0.001 560 176 904 36i	−0.999 996 622 731 36+0.000 004 432 201 85i
$j=4$	0.000 031 241 815 41+0.999 984 407 546 05i	−0.000 000 001 314 81+0.999 999 998 705 65i
$j=5$	−0.000 140 683 721 79−0.999 652 270 923 95i	0.000 000 126 651 58−1.000 000 171 305 12i
$j=6$	−1.000 053 254 584 45+2.000 184 780 132 78i	−1.000 000 004 624 47+2.000 000 082 400 04i
$j=7$	−0.999 455 820 437 42−1.993 542 924 909 76i	−0.999 967 856 572 19−2.000 089 620 976 12i

续表 1

Continued Table 1

	第 5 步的结果 $x_j^{(5)}$	第 6 步的结果 $x_j^{(6)}$
$j=1$	2.000 000 000 000 03	2.000 000 000 000 00
$j=2$	1.000 000 000 000 00−0.000 000 000 000 00i	1.000 000 000 000 00+0.000 000 000 000 00i
$j=3$	−0.999 999 999 984 90−0.000 000 000 054 89i	−1.000 000 000 000 00+0.000 000 000 000 00i
$j=4$	0.000 000 000 000 00+1.000 000 000 000 00i	−0.000 000 000 000 00+1.000 000 000 000 00i
$j=5$	0.000 000 000 000 06−1.000 000 000 000 03i	0.000 000 000 000 00−1.000 000 000 000 00i
$j=6$	−0.999 999 999 999 99+2.000 000 000 000 01i	−1.000 000 000 000 00+2.000 000 000 000 00i
$j=7$	−0.999 999 981 183 44−2.000 000 007 449 98i	−1.000 000 000 000 00−2.000 000 000 000 00i

在这个例子里由（2）式定义的 $d=1$，我们选择的迭代初值并没有满足 $|x_j^{(0)}-r_j|<\frac{d}{2n-1}=\frac{1}{13}$，但数值例子表明 Newton 迭代式（2）仍然收敛。其它许多代数方程的例子也表明定理 1 中要求初值满足的条件 $|x_j^{(0)}-r_j|<\frac{d}{2n-1}$只是保证收敛的一个充分条件，对初值的要求也许可以更宽一些。

参考文献：

[1] Milovanovic G V, Petkovic M S. On the Convergence Order of a Modified Method for Simultaneous Finding Polynomial Zeros [J]. Computing, 1983, 30: 171−178.

[2] Ehrlich L W. A Modified Newton Method for Polynomials [J]. Comm ACM, 1967, 10: 107−108.

[3] 曹志浩，张玉德，李瑞遐．矩阵计算和方程求根［M］．北京：人民教育出版社，1979. 181−240.

[4] 黄清龙．解代数方程时牛顿法的一种改进［J］．应用数学，1995，8：73−76.

[5] 黄清龙．一个求多项式零点的并行迭代法［J］．江苏石油化工学院学报，2001，13（2）：49−51.

Newton Iterative Method for Simultaneous Finding all Roots of a Nonlinear Algebraic Equation

HUANG Qing−long

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou, 213016, China)

Abstract: This paper discusses the convergence of Newton iterative method for simultaneous finding all roots of a nonlinear algebraic equation . For appropriately chosen starting values, it is proved that the method is convergent and the convergence order is at least 2. The proof of convergence showed that the Newton method can be used for finding simple real or complex roots. The numerical results are satisfactory.

Key words: algebraic equation; Newton method; starting values; convergence