

文章编号: 1005—8893 (2005) 01—0044—04

# 用最大熵方法改善图像质量<sup>\*</sup>

江兴方<sup>1, 2</sup>, 陶纯堪<sup>2</sup>, 是度芳<sup>1</sup>

(1. 江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016; 2 南京理工大学 电光学院, 南京 210094)

摘要: 从玻耳兹曼熵的定义出发, 得出信息熵的表达式, 用拉格朗日乘子法得到最大熵的解, 提出由最大熵方法分析直方图均衡化的原理, 并对一幅卫星云图进行直方图均衡化处理。将图像中所有像素尽可能均衡地分布在不同的灰度级上, 获得最大熵。直方图均衡化后的图像对比度由 42 提高到 73, 改善了图像质量。进而分析直方图均衡化对非云笼罩区过黑的原因。

关键词: 熵; 最大熵; 直方图均衡化; MATLAB

中图分类号: O 436 文献标识码: A

图像增强的目的在于对图像中某些特征进行加强或尖锐化, 突出其有价值的信息。直方图拉伸、直方图均衡化都能突出图像中所隐藏的重要信息。文献 [1] 采用了边缘测检的方法对于有大楼阴影的图片, 采用了边缘模糊 Retinex 阴影消除法取得了较好的效果。文献 [2] 提出了图像内对特定一个区域或多个区域进行直方图均衡化; 文献 [3] 提出了分块建模法对各区域进行直方图均衡化; 文献 [4] 在双直方图均衡化、二元子图像直方图均衡化基础上提出了循环平均分离直方图均衡化方法, 都取得了较好的效果。

但是对于遥感图像, 由于摄像设备与拍摄对象之间距离遥远, 一般图像的对比度都不够理想, 难于分辨所拍摄的对象。尤其是云层的阻挡, 严重影响了遥感图像的质量。因此大多数遥感图像利用价值不大, 但是如果有一种通用的程序能对这类图像进行处理, 达到人们能分辨的效果, 那将会有很大的实用价值。用最大熵方法将图像直方图均衡化后, 图像的对比度能明显地得到改善。

## 1 熵、最大熵及其直方图均衡化

19 世纪中叶 Clausius 首先把熵引进热力学, Boltzmann 导出熵在统计力学中的表达式  $S = k_B \log W$ , 式中  $k_B$  为玻耳兹曼常数,  $W$  为气体分

子可能占据的状态数。

1948 年 Shannan 创立信息论, 采用熵来度量信源的不确定性。如图 1 所示, 假定左边是一堆单位强度的银粒, 右边是具有  $K$  个格子 (后称像素)

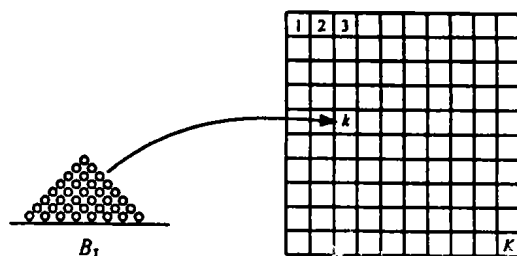


图 1 一个强度随机分布的图像的形成

Fig. 1 Formation of image with intensity random distribution

的黑布。有 1 个人随机地向黑布上扔银粒, 直至全部扔完, 而且 1 颗银粒落在哪一个像素上是随机的, 设像素  $k$  的强度为  $B(k)$ , 即有  $B(k)$  个银粒落在第  $k$  个格子中。假设总银粒数  $B_1$  是很大的数, 则  $B_1 = \sum_{k=1}^K B(k)$  当所有银粒扔完后, 1 幅图像就形成了。如果第 2 个人也是这样将  $B_1$  个银粒随机地扔到同样的“空白”黑布上, 则形成了第 2 幅图像, 第 3 个人则形成第 3 幅图像, 以此类推, 组成 1 个图像系综。根据多项式分布公式, 在产生的具有一特定强度分布 ( $B(1), B(2), \dots, B$

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2005—02—18

作者简介: 江兴方 (1963—), 男, 江苏常州人, 副教授, 主要从事光学工程、物理教学与多媒体教学软件开发。

( $k$ ) 的集合中, 有  $B(j)$ ,  $j=1, 2, \dots, K$  个银粒落在第  $j$  个像素中, 这样生成的图像可能的数目是

$$W(B(1), B(2), \dots, B(K)) = \frac{B_1!}{B(1)! B(2)! \dots B(K)!}$$

求出  $W$  的最大值, 就得到最概然分布, 这种方法称为最大似然方法。

利用 String 公式, 当时  $N \rightarrow \infty$  时,  $\log N! \approx N(\log N - 1)$ 。故

$$\log W = \log \frac{B_1!}{\prod_{k=1}^K B(k)!} \approx B_1(\log B_1 - 1) - \sum_{k=1}^K B(k) \log B(k)$$

$$= B_1(\log B_1 - 1) - \sum_{k=1}^K B(k) \log B(k) + B_1 \log B_1$$

由于  $B_1 \log B_1$  是常数, 故求  $\log W$  的最大值相当于求  $\sum_{k=1}^K B(k) \log B(k)$  的最大值。若定义  $P(k)$

$= \frac{B(k)}{B_1}$  表示某一像素的相对强度值, 则

$$W(P(1), P(2), \dots, P(K)) = \frac{1!}{P(1)! P(2)! \dots P(K)!} \quad (1)$$

$$\text{且 } \sum_{k=1}^K P(k) = 1, \log W \approx - \sum_{k=1}^K P(k) \log P(k)$$

+1, 同样求  $\log W$  的最大值相当于求  $-\sum_{k=1}^K P(k) \log P(k)$  的最大值, 与文献 [5] 中熵的表示  $H$

$(X) = -\sum_{i=1}^M P(x_i) \log P(x_i)$  相一致。

由式 (1) 可知, 应用拉格朗日乘法很容易求得最大熵的解<sup>[6]</sup>, 即当  $P(1) = P(2) = \dots =$

$1/J$ ,  $\sum_{j=1}^J P(j) = 1$  时, 熵值最大, 这就是最大熵直方图均衡化的原理。通过对原图像的各像素尽可能均匀地分布在不同的灰度级上, 得到的图像对比度得到增强和清晰度总体提高。

具体来说, 直方图均衡化是以累积分布函数变换法为基础的, 假定直方图中灰度级用  $r = R/255$  表示, 出现的频率为  $n_r$ , 相应的概率分布为  $p_r =$

$$\frac{n_r}{\sum_{r=0}^{255} n_r}, \text{ 令变换函数为}$$

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(\omega) d\omega$$

$\int_0^r p_r(\omega) d\omega$  是以  $\omega$  为积分变量的累积分布函数,

由于  $0 \leq r \leq 1$ , 则  $0 \leq T(r) \leq 1$ ,  $\frac{ds}{dr} = p_r(r)$ ,

则

$$p_s(s) = p_r(r) \cdot \frac{d}{ds} [T^{-1}(s)] = \left[ p_r(r) \cdot \frac{ds}{dr} \right]_{r=T^{-1}(s)} = 1$$

即在变换后的变量  $s$  的定义域内的概率密度是均匀分布的。用  $r$  的累积分布函数作为变换函数可产生 1 幅灰度级分布具有均匀概率密度的图像, 按信息熵的定义这时的熵为最大值。

对于离散情形, 因为 1 幅图像通过 Matlab 读入后得到的每个像素全是 0~255 范围内的数字, 表示每个像素位置的灰度级。令其变换函数为

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k P_r(r_j), \quad 0 \leq r_j \leq 1$$

式中  $P_r(r_j) = \frac{r_j}{\sum_{j=0}^{255} r_j}$  即各灰度级出现的概率, 其

逆变换为  $r = T^{-1}(s_k)$ 。

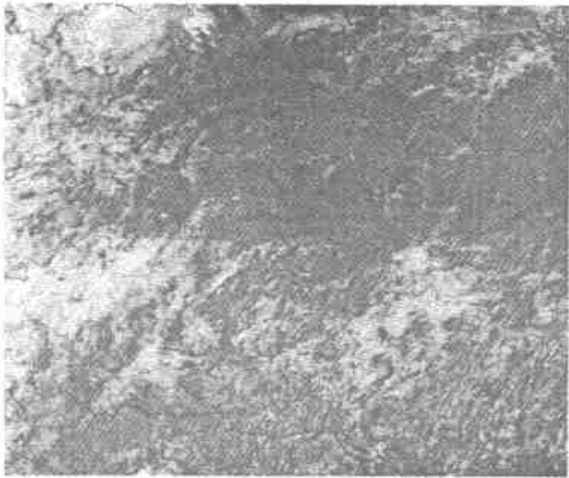
## 2 图像的特征分析与处理

采用 Matlab 读出原始图像的各个像素的灰度级, 然后编写程序统计出各灰度级  $R$  及其所出现的频率  $n$ , 从中可以发现, 原始图像灰度级处于 2~255 之间, 频率首次出现 10 以上的灰度级为 50; 灰度级为 93 的像素最多, 其出现的频率为 2 916; 有 38 个灰度级出现的频率为 0; 从图 2 (b) 中可以看出, 灰度级处于 80~150 之间的像素超过了一半, 可见原始图像灰度级集中在这个范围内。如果采用直方图拉伸法则在灰度级小的区域像素很少, 因此采用最大熵方法正好可以将图像所有像素尽可能地均匀占据各个灰度级上。

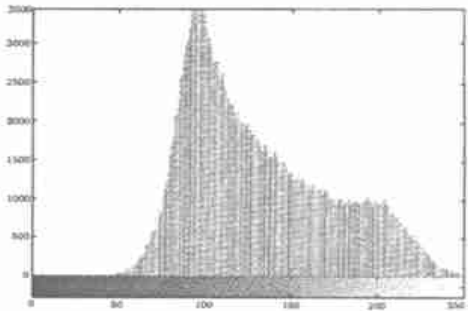
利用灰度级直方图对原始图像处理的方法是: ①读出图像中各像素的灰度值; ②将相同灰度值的个数进行累加, 得到一维数组, 数组  $a[i]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, 255$ , 元素个数为 256; ③将数组  $a[i]$  的前  $i$  项进行累加, 产生新的数组; ④由数组产生新的  $[0, 1]$  区间数组; ⑤显示出直方图均衡化后的新图像及其直方图。

这一过程的物理意义是先统计各灰度值出现的频率  $a[i]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, 255$ , 将灰度级为  $j$  的像素均衡化为新的灰度级为序列, 而就是 0~ $j$  范围内出现的像素值数目占图像总像素数目的百分比。可见图 1 中原始图像灰度级在  $[80, 150]$  被均衡化为灰度级  $[14, 178]$  范围内, 在  $[0, 1]$  区间中位于  $[0.055, 0.70]$  范围内。经直方图均衡化后得到的图像如图 3 (a) 所示, 其直方图如

图3 (b) 所示。出现频率高的范围稀一些，出现频率低的范围密一些，保证处理后新的图像保持原始图的特征。



(a) Original image



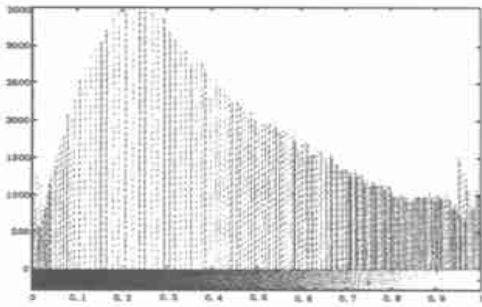
(b) Histogram

图 2 原始图及其直方图

Fig 2 Original image and its histogram



(a) After histogram equalization



(b) Histogram

图 3 直方图均衡化

Fig 3 Histogram equalization

不难看出利用最大熵方法将直方图均衡化后，图像的对比度得到了加强。在原图左上方的细节得到了突出，右下方的线条状地形能看得更清楚。

对图像  $g(i, j)$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ ;  $j=1, 2, \dots, N$ , 由亮度 ( $b$ ) 的定义和对比度 ( $c$ ) 的定义:

$$b = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g(i, j)}{M \times N},$$
$$c = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (g(i, j) - b)^2}{M \times N}}$$

得到图像处理前后的亮度、对比度。如表 1 所示。

表 1 最大熵直方图均衡前后亮度对比度比较

Table 1 Comparison of brightness and contrast

	$b$	$c$
Original image	131.58	42.036
After handled	128.46	73.162

### 3 讨 论

最大熵方法处理图像本质上就是将图像的各像素均匀地分布在各个灰度级上，使对比度差的原始图像得到改善，对于对比度较好的图像处理后对比度更好些。我们通过大量的图像测试直方图均衡化程序，得到的结果是对于任何图像都可以进行直方图均衡化处理，对比度得到改善，突出图像中的信

息。尤其是对于乌云笼罩的遥感图像效果更好, 由于拍摄的图像属于机密信息, 故没有放入到本文中来。

值得一提的是, 图 3 (a) 中没有云的区域相对图 2 (a) 中较黑些, 但是对比度大, 山区中的河流清晰可辨。因此图 3 (a) 的亮度值略比图 2 (a) 的亮度值小些。

#### 参考文献:

[1] 肖志级, 黄建军. 城市彩色航空影像的边缘模糊 Retinex 阴影消除 [J]. 中国电视学与图像分析, 2004, 9 (2): 95—98.  
[2] Tae Keun Kim, Joon Ki Paik, Bong Soon Kang. Contrast Enhancement System Using Spatially Adaptive Histogram Equalization with temporal Filtering [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1998, 44 (1): 82—87.

[3] Joung Youn Kim, Lee Sup Kim, Seung Ho Hwang. An Advanced Contrast Enhancement Using Partially Overlapped Sub-Block Histogram Equalization [J]. IEEE transactions on Circuits and Systems for Video technology, 2001, 11 (4): 475—484.  
[4] Soong Der Chen, Abd Rahman Ramli. Contrast Enhancement Using Recursive Mean-Separate Histogram Equalization for Scalable Brightness preservation [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2003, 49 (4): 1 301—1 308.  
[5] 陶纯堪, 陶纯匡. 光学信息论 [M]. 北京: 科学出版社, 2004. 24.  
[6] 吴乃龙, 袁素云. 最大熵方法 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1991. 9.  
[7] Semsak Jaruwatanadilok, Akira Ishimaru, Yasuo Kuga. Optical Imaging Through Clouds and Fog [J]. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41 (8): 1 834—1 843.  
[8] 江兴方. 一个静电场问题的数值计算 [J]. 江苏工业学院学报, 2003, 15 (2): 53—56.

## Improving the Quality of Image Using the Maximum Entropy Method

JIANG Xing-fang<sup>1,2</sup>, TAO Chun-kan<sup>2</sup>, SHI Du-fang<sup>1</sup>

(1. Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China; 2. School of Electronic Engineering & Optoelectronic Technology, NUST, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** From the entropy definition of Boltzmann, the expression of information entropy and the solution of the maximum entropy by Lagrange's method of multipliers are got. The principle of histogram equalization is analyzed by the maximum entropy method. A satellite cloud image is handled using the histogram equalization method and its contract degree is raised from 42 to 73. All pixels of the image are distributed uniformly in the gray levels. The quality of the image is improved visibly. This paper also analyzes the cause that the brightness in the area of unwrapped with cloudland is over black.

**Key words:** entropy; the maximum entropy method; histogram equalization; Matlab