

文章编号: 1005—8893 (2005) 01—0052—03

# 一个展示由保守向类耗散过渡的分段连续系统<sup>\*</sup>

巢小刚

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

**摘要:** 研究一个具有过电压保护的张弛振荡电路系统, 发现当一个控制参数在一段范围内连续变化时, 系统可以展示从典型保守系统向类耗散系统的过渡, 在一定的参数组合下, 这种转变体现为稳定的混沌运动向一个混沌类瞬态, 以及混沌运动向局域规则运动的过渡, 数值计算结果表明: 这种过渡可以用混沌类瞬态的分数维随控制参数的对数改变规律来描述。

**关键词:** 分段连续; 类耗散; 混沌类瞬态; 分数维

**中图分类号:** O 322      **文献标识码:** A

近年来不连续系统引起了相当的注意<sup>[1,2]</sup>。胡斑比、陈贺胜等人发现了由于不连续性导致的一种随机网<sup>[3]</sup>。如果不连续保守系统中的不连续性能导致不可逆性, 系统则会展示所谓的“类耗散性”, 这样的系统被称为“类耗散系统”。这种耗散性可以导致其独有的特征行为, 例如王旭明、汪颖梅等发现了所谓的“类阵发”<sup>[4]</sup>。

本文对一个具有过电压保护的张弛振荡电路系统进行研究, 发现当一个控制参数在一段范围内连续变化时, 系统可以展示从典型保守系统向类耗散系统的过渡, 其特性可以用混沌类瞬态的分数维随控制参数的对数改变规律来描述。

## 1 系 统

图 1 是一个具有过电压保护功能的张弛振荡电路模型, 其中  $I_1$ ,  $I_2$  为电流源, 且  $i_1 \geq i_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  为可控电子开关。当  $K_1$  闭合,  $K_2$  断开时,  $I_1$  对电容  $C$  快速充电, 当电容两端电压  $U_c$  上升到某一上阈值时,  $K_1$  断开,  $K_2$  闭合,  $C$  通过  $I_2$  缓慢放电, 当  $U_c$  下降到某一个下阈值时,  $K_1$  闭合,  $K_2$  断开,  $C$  又从放电状态转入充电状态。如此不断反复地进行张弛振荡。

图 2 显示了加在图 1 中  $C$  上的电压在一个正弦调制的上阈值和一个受到上阈值上一次“触发”相

位调制的下阈值之间所作的张弛振荡。为了避免电

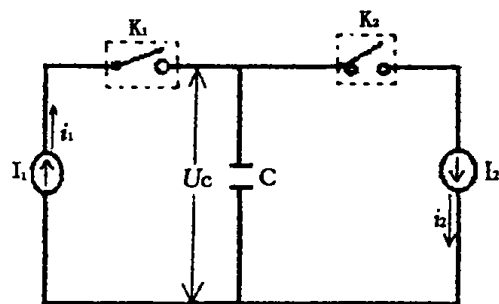


图 1 过电压保护的张弛振荡电路

Fig. 1 An electronic relaxation oscillator with over-voltage protection

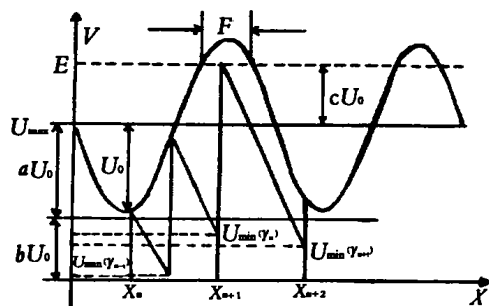


图 2 图 1 所示电路的振荡

Fig. 2 Oscillation of the circuit of Fig. 1

压过高, 进行了电压保护, 即电压超过一个常量  $E$  后, 都强迫地采用值  $E$ 。为了简化模型, 假设

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2004—12—26

作者简介: 巢小刚 (1977—), 江苏常州人, 硕士

电容器的充电电流  $i_1$  无限大以致充电过程在瞬间完成（不需要时间），放电电流  $i_2$  保持恒定以使放电过程随时间线性变化。图 2 中  $F$  表示上阈值超过  $E$  的电压保护区，可以引入一个参数  $c$  来描述电压保护区的大小。王健等人解析得到了此系统的映像<sup>[5]</sup>：

$$\begin{cases} x_{n+1}=f_{1x}=x_n+y_{n+1}+a/b \\ y_{n+1}=f_{1y}=y_n-1/b\sin(2\pi x_n) \end{cases} \text{ [mod. 1] 当 } x_n \notin F$$

(1)

$$\begin{cases} x_{n+1}=f_{2x}=x_n+y_n+(a+c)/b \\ y_{n+1}=f_{2y}=y_n+2x_n \end{cases} \text{ [mod. 1] 当 } x_n \in F$$

(2)

式中， $x_n$  表示张弛振荡达到上阈值处的正弦上阈值调制信号的相位； $a, b$  为参数； $c$  为控制变量；

$$F=\left[0.5+\frac{\arcsin c}{2\pi}, 1-\frac{\arcsin c}{2\pi}\right]$$

2 系统从保守向类耗散的转变

当  $c=1$  时过电压保护区  $F$  的大小为零，这时系统是典型的保守系统。图 3 显示了  $a=2.0, b=3.8, c=1.0$  时系统的相图。此图是略去从相平面  $\{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$  内均匀选取的 100 个初值出发的前 18 000 次迭代，然后记录 2 000 次得到的。如果不略去开始的迭代，所得到的图形完全一样。从相图可以看出，系统所有的椭圆轨道构成椭圆岛，椭圆岛被混沌海所包围。当  $c=1$  时混沌海中的任一点的逆象一定仍在混沌海中，椭圆岛上的任一点的逆象一定仍在椭圆岛上，混沌海和椭圆岛

的交集是空集，混沌运动与椭圆岛上的规则运动完全隔离，这是典型保守系统的动力学行为。

当  $c$  由 1 开始减小时，上述椭圆岛上的某些点可能具有两个逆象，一个位于岛上，对应保守运动，另一个位于岛外的混沌海中，对应类耗散运动。这时混沌海中的混沌迭代将通过混沌海和椭圆岛逆象集的交集向椭圆岛逃逸。混沌海中的保守混沌运动将突变为一个长混沌类瞬态后的规则运动（或在有些参数下的局域混沌运动）。类瞬态的长度与初值密切相关，但或早或晚总要逃逸到规则运动的椭圆岛（或在有些参数下的局域混沌类吸引子）上。这些椭圆岛就称为规则类吸引子。当  $c=0.99$ ，即非常接近于 1 时，混沌类瞬态中的迭代运动大部分都长达几万次。随着控制参数  $c$  在一定范围内的减小，混沌海与椭圆岛逆象集的交集越来越大，混沌类瞬态也越来越短，从图 4 看来构成混沌类瞬态的点子也越来越疏。图 4（从左至右）分别显示了当  $a=2.0, b=3.8, c=0.99, 0.93$  和  $0.85$  时的混沌类瞬态（用浅色的点子表示）和规则类吸引子（用深色的点子表示）。

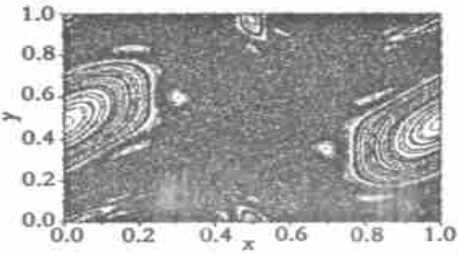


图 3  $c=1$  时系统的相图

Fig 3 Phase diagram of system when  $c=1$

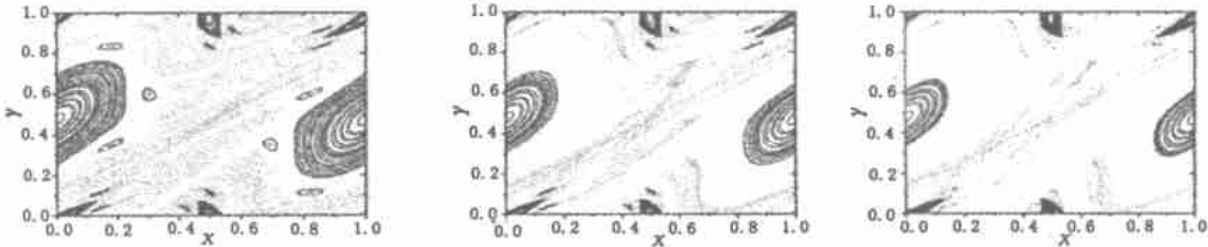


图 4 混沌类瞬态和规则类吸引子

Fig 4 The quasi-transient chaotic state and regular quasi-attractors

3 混沌类瞬态的分数维

图 4 中显示的混沌类瞬态的外形变化只是一个定性的描述。混沌类瞬态的分数维  $D$  随  $c$  的变化才可能显示定量的规律。图 5 显示了我们数值得到

的变化规律，其中  $c_k=1$ ，参数  $c$  的变化范围是  $0.997 \sim 0.85$ 。图中每个  $c$  值对应的混沌类瞬态的分数维数据是采取盒子计数法计算得到的。在计算中逐渐变化相平面上方格子的边长（即“标度  $l$ ”），然后计算标度  $l$  变化时混沌类瞬态点集占据的方格数  $N_l$  的变化。这个变化曲线在  $\ln l - \ln N$  双

对数平面上的直线部分（即“标度不变区”）的斜率就是这时混沌类瞬态的分数维。各个  $c$  值对应的分数维计算都显示了良好的标度不变行为。作为例子，图 6 显示了  $a=2.0$ ,  $b=3.8$ ,  $c=0.97$  时的标度不变行为。此图的标度  $l$  的变化范围是从 10 到 30，混沌类瞬态点集的数据点个数为 100 000 个。所得到的混沌类瞬态的分数维为  $D=1.66 \pm 0.01$ 。其他  $c$  值情况的计算精度大致相同。

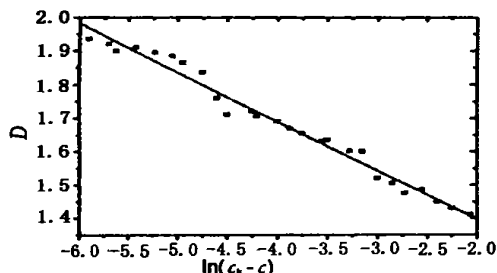


图 5 混沌类瞬态的分数维随参数变化规律

Fig. 5 The law of fraction dimension of quasi-transient chaotic state with the change  $c$  parameter

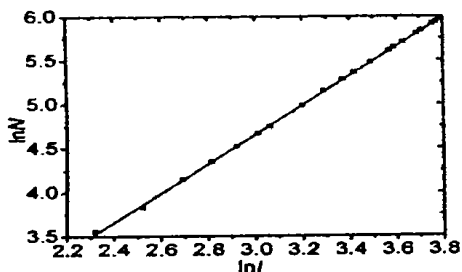


图 6  $c=0.97$  时混沌类瞬态的分数维

Fig. 6 Fraction of quasi-transient chaotic state when  $c=0.97$

图中显示的计算结果表明  $D$  随  $c$  的变化满足： $D \propto \ln(c_k - c)$ 。

## 4 结 论

本文通过一个具有过电压保护功能的张弛振荡电路的研究来展示典型保守系统向类耗散系统的过渡，这种过渡体现为稳定的混沌海运动向具有分数维的混沌类瞬态转变，数值计算结果表明这种转变可以混沌类瞬态的分数维随控制参数的对数改变规律来定量描述，即  $D \propto \ln(c_k - c)$ ,  $c_k=1$ 。

## 参考文献:

- [1] 何大韧, 汪秉宏, 汪颖梅, 等. 非线性动力学引论 [M]. 西安: 陕西科技出版社, 2001.
- [2] 巢小刚. 一个分段光滑系统中的混沌吸引子 [J]. 江苏工业学院学报, 2004, 16 (3): 43-45.
- [3] Chen He-Sheng, Wang Jiao, Gu Yan. Transport Properties of a Classical One-Dimensional Kicked Billiard Model [J]. Chin Phys Lett, 2000, 17 (2): 85.
- [4] 汪颖梅, 王旭明, 赵金刚, 等. 一种“类耗散系统”中的“类 V 型阵发” [J]. 物理学报, 2002, 51 (7): 1475-1482.
- [5] Wang Jian, Ding Xiao-Ling, Hu Banli, et al. Characteristics of a Piecewise Smooth Area-Preserving Map [J]. Physical Review E, 2001, 64: 1-9.

# Transition from Conservative to Quasi-Dissipative Shown in a Piecewise-Continuous System

CHAO Xiao-gang

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** Transition from conservative to quasi-dissipative is observed in an electronic relaxation oscillator with over-voltage protection when adjusting a control parameter continuously. With a certain group of parameters this transition displays a change from a stable chaotic motion to a quasi-transient chaotic state and a change from chaotic motion to local regular motion. Results from numerical calculation show that this transition may be described by a logarithmic law of fraction dimension of the quasi-transient chaotic state when adjusting a control parameter.

**Key words:** piecewise continuity; quasi-dissipative; quasi-transient chaotic state; fraction dimension