文章编号：1005－8893（2005）01－0055－03

# 外积与外微分的性质研究及其应用*

班书昊，李晓艳
（江苏工业学院 机械工程系，江苏 常州 213016）

摘要：介绍了外积与外微分，讨论了外微分与积分定理的关系，得出了积分公式的简单表示形式；从热力学第二定理出发，利用外微分构造了熵、焓以及吉布斯函数的表达式。

关键词：外积；外微分；积分定理；热力学第二定理
中图分类号：O 183 文献标识码：A

矢量分析的理论已有百年的历史[1]，其中涉及的 3 个最基本的函数[2]是梯度、散度与旋度[3]，这在处理格林公式和高斯公式时应用极为方便。不过，随着现代数学的发展，尤其是外积与外微分的发展，使得矢量分析得到了进一步简化。

## 1 外 积

设 $\boldsymbol{E}$ 为实维线性空间，构造一种新的线性空间 $\wedge^p\boldsymbol{E}$，其中 $p=0, 1, 2, \cdots, n$。如果考虑线性空间 $\wedge^p\boldsymbol{E}$ 中的向量运算满足如下表达式，则称“$\wedge$”为外积运算符号。

$$\begin{cases} k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} \end{cases} \tag{1}$$

其中，$k\in R$，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}\in\wedge^p\boldsymbol{E}$。显然，

$$\wedge^0=R,\quad \wedge^1=\boldsymbol{E} \tag{2}$$

对于 $p=2$，$\wedge^2\boldsymbol{E}=\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\wedge\boldsymbol{y}_i \mid \lambda_i\in R,\ \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{y}_i\in\boldsymbol{E}\right\}$，设 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的一组基，向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 具有如下的描述形式：

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\boldsymbol{e}_i \tag{3}$$

则向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的外积为：

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\sum_{i<j}(\lambda_i\mu_j-\lambda_j\mu_i)\,\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j \tag{4}$$

故 $\{\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 构成了 $\wedge^2\boldsymbol{E}$ 中的一组基，且 $\wedge^2\boldsymbol{E}$ 的维数为 $C_n^2=n(n-1)/2$。

## 2 外微分

对 $\forall$ 可微流形 $\boldsymbol{M}$，总存在一个唯一的映射，冠以符号 d。

$$\mathrm{d}:\ \wedge^p(\boldsymbol{M})\rightarrow\wedge^{p+1}(\boldsymbol{M})$$

即 $p$ 次微分形式到 $p+1$ 次微分形式的映射。同时认为外微分具有如下的性质：若 $f\in F^0(\boldsymbol{M})$，则 $\mathrm{d}f$ 是普通形式的微分；$\mathrm{d}(\omega+\theta)=\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\theta$ 具有任意次微分；$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta$，对 $\forall\omega\in F^p(\boldsymbol{M})$。则：

$$\mathrm{d}^2\omega=0 \tag{5}$$

证明：$\mathrm{d}^2\omega=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)=$

$$\sum_{j,i=1}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i+\sum_{i>j}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i+$$

$$\sum_{i=j}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=$$

$$\sum_{i<j}^{n}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=0$$

在三维欧氏空间中，设函数 $f(x, y, z)$ 在空间区域 $V$ 上连续，则可以定义 4 个具有外微分形式的函数。

* 收稿日期：2004－12－24
作者简介：班书昊（1978－），男，山东临沂人，西安交通大学学士，清华大学硕士。

$\omega_0 = f(x, y, z)$ (6)

$\omega_1 = a(x, y, z)\,dx + b(x, y, z)\,dy + c(x, y, z)\,dz$ (7)

$\omega_2 = A(x, y, z)\,dx \wedge dy + B(x, y, z)\,dy \wedge dz + C(x, y, z)\,dz \wedge dx$ (8)

$\omega_3 = F(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz$ (9)

其中，$\omega_0$、$\omega_1$、$\omega_2$ 和 $\omega_3$ 分别具有 0 阶、1 阶、2 阶和 3 阶外微分形式。若再假设空间区域 $V$ 上所涉及到的函数皆可微，则外微分运算如下：

$d\omega_0 = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ (10)

$d\omega_1 = (c_y - b_z)dy \wedge dz + (a_z - c_x)dz \wedge dx + (b_x - a_y)\,dx \wedge dy$ (11)

$d\omega_2 = (A_z + B_x + C_y)\,dx \wedge dy \wedge dz$ (12)

$d\omega_3 = 0$ (13)

下指标 $x$、$y$ 和 $z$ 分别表示该函数对此坐标求偏导数，如 $f_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$。

因此，在 $n$ 维外积空间中，每一个 $k$ 阶外微分形式（$k < n$）的外微分是一个（$k+1$）阶外微分形式，而一个 $n$ 阶外微分形式的外微分则为 0。

## 3 外微分在定积分中的应用

相比普通微分形式，外微分作为流形空间的一种微分形式，在描述空间定积分时具有巨大的简洁性。设平面区域 $D$ 的边界为 $L$，则格林公式为：

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \tag{14}$$

若令 $\omega = P\,dx + Q\,dy$，由式（7）和式（11）得格林公式的外微分描述：

$$\int_L \omega = \iint_D d\omega \tag{15}$$

这里，$dx\,dy$ 是外积 $dx \wedge dy$ 的简写。

设 $\partial\Omega$ 为空间区域 $\Omega$ 的正向边界，则高斯公式为：

$$\iint_{\partial\Omega} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_\Omega (P_x + Q_y + R_z)\,dx\,dy\,dz \tag{16}$$

若令 $\omega_2 = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$，由式（8）和式（12）得高斯公式的外微分描述：

$$\iint_{\partial\Omega} \omega_2 = \iiint_\Omega d\omega_2 \tag{17}$$

引入符号〈,〉表示积分，其中第 1 项为积分区域，第 2 项为被积函数，如 $\langle [a, b], f(x) \rangle = \int_a^b f(x)\,dx$，则格林公式与高斯公式都具有统一的形式：

$$\langle \partial\Omega, \omega \rangle = \langle \Omega, d\omega \rangle \tag{18}$$

其中，$\partial\Omega$ 表示区域 $\Omega$ 的正向边界，$d\omega$ 表示 $\omega$ 的外微分。

## 4 外微分在热力学中的应用

在流体力学中，特别是气体热力学，借助统计学可以对气体的状态进行描述，理想气体的状态参数通常有 5 个，但只有 2 个是相互独立的，故气体热力学系统相当于一个二维流形。

设 $U$、$T$、$S$、$P$ 和 $V$ 分别为系统的内能、温度、熵、压强和体积，则热力学第二定理可以表示为：

$$dU = T\,dS - P\,dV \tag{19}$$

对热力学系统而言，它相当于一个二维流形，故可采用外微分来描述，由外微分的性质，知 $d^2U = 0$，其中 $U \in \wedge^2(M)$，代入式（19）可得：

$$dT \wedge dS - dP \wedge dV = 0 \tag{20}$$

外积与外微分应用在可微流形上，允许进行坐标变换，分别取坐标系 $M(V, T)$、$M(T, P)$、$M(S, P)$ 和 $M(S, V)$，则很容易构造出系统的自由能、吉布斯函数、焓和内能。

（1）取流形系统的坐标系为 $M(V, T)$，令 $A = S\,dT$，$B = P\,dV$，

$$d(A + B) = dS \wedge dT + dP \wedge dV = 0 \tag{21}$$

由式（5）知 $A+B$ 必为某个函数的一次微分形式，不妨令 $dF = -(A+B)$，物理学上称 $F$ 为封闭系统的自由能。

（2）取流形系统的坐标系为 $M(T, P)$，令 $A = S\,dT$，$B = P\,dP$，

$$d(B - A) = dV \wedge dP - dS \wedge dT = 0 \tag{22}$$

由式（5）知 $B-A$ 必为某个函数的一次微分形式，不妨令 $dG = B - A$，物理学上称 $G$ 为系统的吉布斯函数。

（3）取流形系统的坐标系为 $M(S, P)$，令 $A = T\,dS$，$B = V\,dP$，

$$d(A + B) = dT \wedge dS + dV \wedge dP = 0 \tag{23}$$

由式（5）知 $A+B$ 必为某个函数的一次微分形式，不妨令 $dH = (A+B)$，物理学上称 $H$ 为

封闭系统的焓。

(4) 取流形系统的坐标系为 $M$ ($S$, $V$), 令 $A = T\mathrm{d}S$, $B = P\mathrm{d}V$,

$$\mathrm{d}(A - B) = \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}S - \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}V = 0 \tag{24}$$

由式 (5) 知 $A - B$ 必为某个函数的一次微分形式, 不妨令 $\mathrm{d}U = (A - B)$, 物理学上称 $U$ 为封闭系统的内能。

## 5 结 论

外代数的发展, 尤其是外积与外微分的发展, 不仅对积分公式进行了简化, 同时也为气体热力学公式的研究提供了便利。借助外微分, 可以用更为简洁的公式描述物理规律, 能够非常容易地理解力学概念。

参考文献:

[1] 戴振铎. 矢量分析新论 [J]. 清华大学学报 (自然科学版), 2000, 40 (2): 1-4.

[2] Gibbs J W. Elements of Vector Analysis [M]. New York: Dover Publications, 1961.

[3] 戴振铎. 散度、旋度和梯度的统一定义 [J]. 应用数学和力学, 1986, 7 (1): 1-6.

# On the Properties and Application of Exterior Product and Exterior Differential

BAN Shu-hao, LI Xiao-yan

(Department of Mechanic Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

**Abstract**: Exterior product and exterior differential are introduced. The relation between exterior differential and integral theorems is discussed, and a simple formula describing integral formula is obtained. Expressions of entropy, enthalpy and Gibbs function are formulated by exterior differential derived from second law of thermodynamics.

**Key words**: exterior product; exterior differential; integral theorems; second law of thermodynamics