

文章编号: 1005-8893 (2005) 02-0041-03

复合载荷下开顶扁球壳的非线性稳定问题^{*}

周 倜

(江苏工业学院 机械工程系, 江苏 常州 213016)

摘要: 用修正迭代法讨论了开顶扁球壳在均布及中心集中载荷联合作用下的非线性稳定问题, 得到了临界荷载的二次近似解。

关键词: 开顶扁球壳; 复合载荷; 非线性稳定性; 修正迭代法

中图分类号: O 343.9

文献标识码: A

在现代工程结构中, 壳体得到了大量应用。对壳体进行稳定性研究, 不仅具有重要的工程意义, 而且也有重大的理论意义。但由于求解非线性方程的巨大困难, 因而对壳体稳定性的研究进展缓慢。而开顶扁球壳的非线性稳定问题较封顶扁球壳的研究更为困难, 目前这方面的文献很少见。文献 [1, 2] 分别讨论了在集中载荷及均布载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题。

本文采用修正迭代法讨论了具有硬中心、外缘固定夹紧的开顶扁球壳在均布载荷及中心集中载荷联合作用下的非线性稳定问题。

1 基本方程

考虑外边缘固定夹紧, 并在内边缘具有硬中心的开顶扁球壳, 见图 1 所示。设壳厚 h , 中曲面半径为 R , 内、外边缘半径分别为 b 、 a , 中心集中载荷为 P , 均布载荷集度为 q , 则此开顶扁球壳的大挠度弯曲方程及边界条件为^[1, 2]:

$$D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - N_r \left(\frac{r}{R} + \frac{dw}{dr} \right) = \frac{P}{2\pi r} + \frac{q}{2r} (r^2 - b^2) \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{r}{R} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$r=a: w=0, \frac{dw}{dr}=0, \frac{d}{dr} (rN_r) - \mu N_r=0 \quad (3)$$

$$r=b: \frac{dw}{dr}=0, \frac{d}{dr} (rN_r) - \mu N_r=0 \quad (4)$$

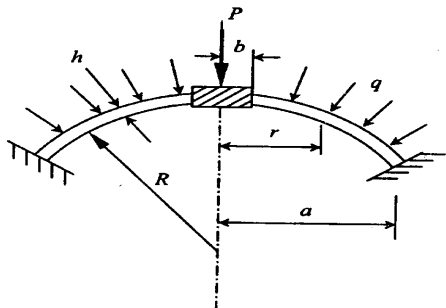


图 1 具有硬中心的开顶扁球壳

Fig. 1 Truncated shallow spherical shell of possess hard centre

引入无量纲量:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{r^2}{a^2}, \quad y = \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{w}{h}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{dy}{d\rho} = \theta, \\ S &= \frac{3(1-\mu^2)a^2 N_r}{Eh^3}, \quad k = \frac{a^2}{2Rh} \sqrt{3(1-\mu^2)}, \\ \beta_1 Q &= \frac{Pa^2}{4\pi Eh^4} [3(1-\mu^2)]^{3/2}, \\ \beta_2 Q &= \frac{qa^4}{4Eh^4} [3(1-\mu^2)]^{3/2} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

其中复合载荷按单参数 Q 变化, 且约定 Q 为正值, 载荷作用方向仅由 β_1 、 β_2 的正负号决定。当载荷以均布载荷为主时, 可取 $\beta_2=1$, 当载荷以集中力为主时, 可取 $\beta_1=1$ 。这样, β_1 和 β_2 的绝

* 收稿日期: 2005-04-12

作者简介: 周倜 (1946—), 男, 江苏无锡人, 副教授。

对值均可限制在 1 以内。

无量纲化后的方程及边界条件为:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho\theta) = S(k+\theta) + Q\left[\frac{\beta_1 - \alpha\beta_2}{\rho} + \beta_2\right] \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho S) = -\theta\left[k + \frac{\theta}{2}\right] \quad (7)$$

$$\rho=1: y=0, \theta=0, 2\frac{dS}{d\rho} + (1-\mu)S=0 \quad (8)$$

$$\rho=\alpha: \theta=0, 2\alpha\frac{dS}{d\rho} + (1-\mu)S=0 \quad (9)$$

这样, 问题就化为在边界条件 (8)、(9) 下求解非线性方程组 (6) 和 (7)。

2 基本方程的求解

用修正迭代法求解边值问题 (6) ~ (9)。在一次近似中, 在方程 (6) 中略去含 S 的项, 得到下列线性边值问题:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho\theta_1) = Q\left[\frac{\beta_1 - \alpha\beta_2}{\rho} + \beta_2\right] \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho S_1) = -\theta_1\left[k + \frac{\theta_1}{2}\right] \quad (11)$$

$$\rho=1: \theta_1=0, 2\frac{dS_1}{d\rho} + (1-\mu)S_1=0 \quad (12)$$

$$\rho=\alpha: \theta_1=0, 2\alpha\frac{dS_1}{d\rho} + (1-\mu)S_1=0 \quad (13)$$

利用积分方程 (10) 和边界条件, 得到:

$$\theta_1 = Q\left[\frac{a_1}{\rho} + a_2 + a_3\rho + a_4\ln\rho\right] \quad (14)$$

其中

$$a_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[-\beta_1\ln\alpha + \beta_2\left[\frac{1-\alpha}{2} + \alpha\ln\alpha\right]\right] \quad (15)$$

$$a_2 = \frac{1}{1-\alpha}\left[\beta_1\alpha\ln\alpha - \beta_2\left[\frac{1-\alpha^2}{2} + \alpha^2\ln\alpha\right]\right] \quad (16)$$

$$a_3 = \frac{\beta_2}{2} \quad (17)$$

$$a_4 = \beta_1 - \alpha\beta_2 \quad (18)$$

由 (5) 式及 (8) 式, 可得到无量纲挠度

$$y_1 = Q\left[a_1\ln\rho - a_2(1-\rho) - \frac{a_3}{2}(1-\rho^2) + a_4(\rho\ln\rho + 1-\rho)\right] \quad (19)$$

壳体的平均挠度为

$$\bar{w} = \frac{\int_b^a w \cdot 2\pi r dr}{\pi(a^2 - b^2)} = \frac{2h}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 y d\rho$$

选取摄动参数为

$$Y_m = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 y d\rho \quad (20)$$

把 (19) 式代入积分, 并令

$$c = (1-\alpha)\left[-a_1(1-\alpha + \alpha\ln\alpha) - a_2\left[\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right] - \frac{a_3}{2}\left[\frac{2}{3} - \alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right] + a_4\left[\frac{1}{4} - \alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha\right]\right]^{-1} \quad (21)$$

于是得到一次近似下壳体的特征关系式

$$Q = cY_m \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (14) 式, 得

$$\theta_1 = cY_m\left[\frac{a_1}{\rho} + a_2 + a_3\rho + a_4\ln\rho\right] \quad (23)$$

将 (23) 式代入方程 (11) 后积分, 并利用边界条件 (12) 及 (13) 式得到一次近似下的 S_1 。

在二次近似中, 有如下线性边值问题

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho\theta_2) = S_1(k+\theta_1) + Q\left[\frac{\beta_1 - \alpha\beta_2}{\rho} + \beta_2\right] \quad (24)$$

$$\rho=1: \theta_2=0, \rho=\alpha: \theta_2=0 \quad (25)$$

积分方程 (24), 并利用边界条件 (25), 便得到二次近似解

$$\begin{aligned} \theta_2 = & Q\left[\frac{a_1}{\rho} + a_2 + a_3\rho + a_4\ln\rho\right] - \\ & k^2 c Y_m \left[\left(\frac{A_1}{2} - \frac{3}{4}a_1\right)\rho + \frac{1}{12}\left(a_2 - \frac{7}{3}a_4\right)\rho^2 + \right. \\ & \left. \frac{a_3}{72}\rho^3 + B_1\ln\rho + \frac{a_1}{2}\rho\ln\rho + \frac{a_4}{12}\rho^2\ln\rho - C_1 - \frac{D_1}{\rho}\right] - \\ & kc^2 Y_m^2 (K_1\rho + K_2\rho^2 + K_3\rho^3 + K_4\rho^4 + K_5\frac{\ln\rho}{\rho} + \\ & K_6\ln\rho + K_7\rho\ln\rho + K_8\rho^2\ln\rho + K_9\rho^3\ln\rho + K_{10}\ln^2\rho + \\ & K_{11}\rho\ln^2\rho + K_{12}\rho^2\ln^2\rho - C_2 - \frac{D_2}{\rho}) - \\ & c^3 Y_m^3 (M_1\rho + M_2\rho^2 + M_3\rho^3 + M_4\rho^4 + M_5\rho^5 + \\ & M_6\frac{\ln\rho}{\rho} + M_7\ln\rho + M_8\rho\ln\rho + M_9\rho^2\ln\rho + \\ & M_{10}\rho^3\ln\rho + M_{11}\rho^4\ln\rho + M_{12}\frac{\ln^2\rho}{\rho} + M_{13}\ln^2\rho + \\ & M_{14}\rho\ln^2\rho + M_{15}\rho^2\ln^2\rho + M_{16}\rho^3\ln^2\rho + M_{17}\rho\ln^3\rho + \\ & M_{18}\rho^2\ln^3\rho - C_3 - \frac{D_3}{\rho}) \end{aligned} \quad (26)$$

其中 C_1 、 D_1 、 C_2 、 D_2 、 C_3 、 D_3 为积分常数, $K_1 \sim K_{12}$, $M_1 \sim M_{18}$ 为系数。

由 (5) 式及 (8) 式, 可得到无量纲挠度:

$$y_2 = QR_1(\rho) - k^2 c Y_m R_2(\rho) - kc^2 Y_m^2 R_3(\rho) - c^3 Y_m^3 R_4(\rho) \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (20) 式, 整理后即得:

$$Q = [c + k^2 c^2 N_1(\alpha)] Y_m + kc^3 N_2(\alpha) Y_m^2 + c^4 N_3(\alpha) Y_m^3 \quad (28)$$

其中 $N_1(\alpha)$ 、 $N_2(\alpha)$ 、 $N_3(\alpha)$ 的形式均可确定。在 (27) 式中, 令 $\rho = \alpha$ 即得内边缘挠度 y_0 :

$$y_0 = QR_1(\alpha) - k^2 c Y_m R_2(\alpha) - kc^2 Y_m^2 R_3(\alpha) - c^3 Y_m^3 R_4(\alpha) \quad (29)$$

将 (29) 式与 (28) 式联立, 即得到用参数 Y_m 表示的 $Q \sim y_0$ 的特征关系式。

以 $\frac{b}{a} = 0.3$, $\mu = 0.3$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1$ 的情况为例, 按公式 (28) 和 (29) 可绘出不同几何参数 k 值下的特征曲线 (图 2)。在 k 值较小时, $Q \sim$

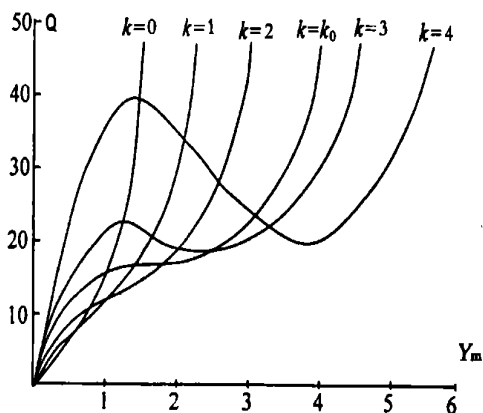


图 2 各种 k 值下的特征曲线

Fig. 2 The characteristic curves of all kind of k

y_0 曲线单调上升, 表明此时壳体不会出现失稳, 当 $k > k_0$ 后, $Q \sim y_0$ 曲线出现波纹状, 这时壳体便产生了跳跃现象。应用极值条件: $\frac{dQ}{dy_0} = \left(\frac{dQ}{dY_m} \right) \left(\frac{dy_0}{dY_m} \right) = 0$, 便可得到产生跳跃现象时的摄动参数为

$$Y_m^* = \frac{-kcN_2 \pm \sqrt{k^2 c^2 N_2^2 - 3cN_3(1+k^2 cN_1)}}{3c^2 N_3} \quad (30)$$

将此 Y_m^* 值代入 (28) 式, 即得到临界载荷的二次近似公式:

$$Q^* = (c + k^2 c^2 N_1) Y_m^* + kc^3 N_2 Y_m^{*2} + c^4 N_3 Y_m^{*3} \quad (31)$$

其中对应于 (30) 式中负号的 Q^* 是上临界载荷, 对应于 (30) 式中正号的 Q^* 是下临界载荷, 它们分别是 $Q \sim y_0$ 曲线上的极大值点和极小值点。

当 $k < k_0$ 时, 壳体不会失稳, k_0 值就是 $Q \sim y_0$ 曲线是否出现波纹状的分界点。由极值条件, 关于 Y_m 的二次方程有重根的条件为方程的判别式为零, 即: $k^2 c^2 N_2^2 - 3cN_3(1+k^2 cN_1) = 0$ 。

由此解得: $k_0 = \sqrt{\frac{3N_3}{c(N_2^2 - 3N_1 N_3)}}$, 在 $k < k_0$ 时, 壳体不会失稳; 当 $k \geq k_0$ 时, 壳体将发生失稳。因此 k_0 是区分壳体失稳与否的分界点。

3 中心挠度为零的情况

利用上节结果, 可以讨论扁球壳硬中心处挠度为零的情况。这相当于受均布载荷的扁球壳在中心处有刚性支撑的问题。为此在 (29) 式中令 $y_0 = 0$, 再与 (28) 式联立, 消去 Q , 得到

$$\left[1 + k^2 c N_1 - k^2 \frac{R_2}{R_1} \right] + k \left[c N_2 - \frac{R_3}{R_1} \right] c Y_m + \left[c N_3 - \frac{R_4}{R_1} \right] c^2 Y_m^2 = 0$$

令 $\beta_2 = 1$, 固定 k 和 α , 则由上式可得到 β_1 与 Y_m 的关系, 再与 (28) 式联立, 以 Y_m 为参数, 便可求得相应的 Q , 而 $\beta_1 Q$ 就相当于刚性支撑的约束反力。此外, 在 k 值较大时, $Q \sim \beta_1$ 曲线出现波纹状, 这表明此时扁球壳已出现失稳。

参考文献:

- [1] 刘人怀, 成振强. 应用数学和力学 [J]. 1988, 9 (2): 95—105.
- [2] 刘人怀, 李东. 应用数学和力学 [J]. 1988, 9 (3): 205—216.

On the Nonlinear Stability of a Truncated Shallow Spherical Shell under Composite Load

ZHOU TI

(Department of Mechanical Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In this paper, the nonlinear stability problem of a truncated shallow spherical shell under composite load is discussed by using modified iteration method. The analytic solution of the second approximation for critical buckling load has been obtained.

Key words: truncated shallow spherical shell; composite load; nonlinear stability; modified iteration method