文章编号：1005－8893（2005）02－0044－03

广义微分的统一形式及其在弹性力学中的应用*

班书昊，李晓艳
（江苏工业学院 机械工程系，江苏 常州 213016）

摘要：介绍了外微分、Hodge 星算子和余微分，提出了广义微分的统一形式。应用广义微分解释了拉普拉斯算子，并给出了弹性力学中空间平衡微分方程等效描述形式。

关键词：外微分；Hodge 星算子；余微分；广义微分
中图分类号：O 18 文献标识码：A

微分理论的研究已有百年的历史，其中，最为经典的运算是梯度、旋度和散度[1]。现代数学的发展，尤其是流变学和外代数的发展，出现了外微分、Hodge 星算子和余微分，这类基于矢量分析理论[2]的新型微分将大大简化物理学、力学规律的描述。

设 $\boldsymbol{E}$ 为实 n 维线性空间，构造一种新的线性空间 $\wedge^p\boldsymbol{E}$，其中 $p=0,1,2,\cdots,n$。如果考虑线性空间 $\wedge^p\boldsymbol{E}$ 中的向量运算满足如下表达式，则称"∧"为外积运算符号。

$$k(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$
$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}$$

其中，$k\in\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为外积空间 $\wedge^p\boldsymbol{E}$ 中的张量。

1 外微分

定义 1[3]：对 ∀可微流形 M，总存在一个唯一的映射，冠以符号 d。

$$\mathrm{d}:\wedge^p(M)\to\wedge^{p+1}(M),\ p=0,1,\cdots,n$$

即 p 次微分形式到 $p+1$ 次微分形式的映射。同时认为外微分具有如下的性质：

①若 $f\in\wedge^0(M)$，则 $\mathrm{d}f$ 是普通形式的微分。

②$\mathrm{d}(\omega+\theta)=\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\theta$，$\omega$，$\theta$ 具有任意次微分。

③$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta$ 对 $\forall\omega\in\wedge^p(M)$

④$\mathrm{d}^2\omega=0$

在 3 维欧氏空间中，设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 V 上连续，则可以定义 4 个具有外微分形式的函数。

$$\omega_0=f(x,y,z) \tag{1}$$

$$\omega_1=a(x,y,z)\mathrm{d}x+b(x,y,z)\mathrm{d}y+c(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

$$\omega_2=A(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+B(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+C(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\omega_3=F(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \tag{4}$$

其中，ω_0、ω_1、ω_2 和 ω_3 分别具有 0 阶、1 阶、2 阶和 3 阶外微分形式。若再假设空间区域 V 上所涉及到的函数皆可微，则外微分运算如下：

$$\mathrm{d}\omega_0=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\omega_1=(c_y-b_z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(a_z-c_x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(b_x-a_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{6}$$

$$\mathrm{d}\omega_2=(A_z+B_x+C_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\omega_3=0 \tag{8}$$

下指标 x、y 和 z 分别表示函数对此坐标求偏导数，如 $f_x=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$。为书写方便，本文

* 收稿日期：2005－03－15
作者简介：班书昊（1978－），男，山东临沭人，西安交通大学学士，清华大学硕士。

在描述2阶、3阶外微分形式时，外积采用并矢的写法，省去外积符号“∧”。

对于1阶、2阶和3阶外微分形式，也可以用符号“$\langle {a \atop b} \rangle$”表示，其中，$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$或$\mathrm{d}\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{b}$为张量。即

$$\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{L} \atop \boldsymbol{b}} \rangle = b_1\mathrm{d}x_1+b_2\mathrm{d}x_2+b_3\mathrm{d}x_3$$

$$\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{S} \atop \boldsymbol{b}} \rangle = b_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3+b_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1+b_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{V} \atop \boldsymbol{b}} \rangle = b\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

2 Hodge 星算子

定义2[4]：对 ∀可微流形M，总存在一个唯一的映射，冠以符号$*$。

$*$：$\wedge^p(M)\to\wedge^{n-p}(M)$，$p=0,1,\cdots,n$

即p次微分形式到$n-p$次微分形式的映射。同时认为外微分在3维欧拉空间中具有如下的性质：

$$\left.\begin{aligned}&{}^*\mathrm{d}x_i=\varepsilon_{ijk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k\\&{}^*(\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k)=\varepsilon_{ijk}\mathrm{d}x_i\\&{}^*(\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k)=\varepsilon_{ijk}\\&{}^*\varepsilon_{ijk}=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中ε_{ijk}为Eddington符号，指标重复不求和。并规定

$$^{**}\omega=(-1)^{p(n-p)}\omega \tag{10}$$

设向量$\boldsymbol{A}=a\mathrm{d}x_1+b\mathrm{d}x_2+c\mathrm{d}x_3$，其中$a$、$b$和$c$皆为坐标$x_1$、$x_2$和$x_3$的函数，且$x_1$、$x_2$和$x_3$构成右手系。则Hodge星运算与$\nabla$具有如下的关系：

$$({}^*\mathrm{d})\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{11}$$

$$({}^*\mathrm{d}^*)\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{12}$$

证明：

$({}^*\mathrm{d})\boldsymbol{A}={}^*(\mathrm{d}\boldsymbol{A})={}^*((c_2-b_3)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3+(a_3-c_1)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1+(b_1-c_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)=(c_2-b_3)\mathrm{d}x_1+(a_3-c_1)\mathrm{d}x_2+(b_1-c_2)\mathrm{d}x_3=\nabla\times\boldsymbol{A}$

$({}^*\mathrm{d}^*)\boldsymbol{A}=({}^*\mathrm{d})({}^*\boldsymbol{A})=({}^*\mathrm{d})(a\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3+b\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1+c\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)={}^*(a_1+b_2+c_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=a_1+b_2+c_3=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

其中，$a_i=\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$，$b_j=\dfrac{\partial b}{\partial x_j}$，$c_k=\dfrac{\partial c}{\partial x_k}$（$i$，$j$，$k=1$，2，3）。

3 余微分

定义3：对 ∀可微流形M，总存在一个唯一的映射，冠以余微分符号δ。

δ：$\wedge^p(M)\to\wedge^{p-1}(M)$，$p=0,1,\cdots,n$

即p次微分形式到$p-1$次微分形式的映射。映射过程如下：

$$\wedge^p(M)\xrightarrow{*}\wedge^{n-p}(M)\xrightarrow{d}\wedge^{n-p+1}(M)\xrightarrow{*}\wedge^{p-1}(M)$$

因此，余微分δ具有下面2个性质：

①若$f\in\wedge^0(M)$，则$\delta f=0$。

②若$\omega\in\wedge^p(M)$，则

$\delta\omega=(-1)^{n(p+1)+1}({}^*\mathrm{d}^*)\omega$，$p\geqslant1$

4 广义微分的统一形式

为建立广义微分的统一形式，本文引入算子D_k，其中$k=0,1,2,3$分别表示微分、外微分、Hodge星算子、余微分，且认为$\mathrm{D}_{ijk}=\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k$，这里的$i$、$j$和$k$为0到3之间的任意整数。如$\mathrm{D}_{312}=\mathrm{D}_3\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2=(\delta\mathrm{d}^*)$，以此类推，并称算子D为广义微分算子。

引理：拉普拉斯算子Δ可以看成一种从p次微分到p次微分的线性映射算子。即

$$\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d} \tag{13}$$

定理1：若$f\in\wedge^0(M)$，则$\Delta f=\mathrm{D}_{31}f=-\mathrm{D}_{2121}f$。

证明：

$\Delta f=(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})f=(\delta\mathrm{d})f=\mathrm{D}_3\mathrm{D}_1f=\mathrm{D}_{31}f$

$\Delta f=(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})f=\delta(\mathrm{d}f)=(-1)^{2n+1}\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2(\mathrm{D}_1f)=-\mathrm{D}_{2121}f$

定理2：若$f\in\wedge^p(M)$（$1\leqslant p\leqslant n$），则$\Delta f=(\mathrm{D}_{13}+\mathrm{D}_{31})f=(-1)^{n(p+1)+1}\mathrm{D}_{1212}+(-1)^{n(p+2)+1}\mathrm{D}_{2121}$

定理3：在无体力的情况下，弹性力学中空间平衡微分方程为

$$\mathrm{D}_{12}\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{L} \atop \sigma_i} \rangle=0 \tag{14}$$

其中，D_{12}为广义微分算子，$\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{L} \atop \sigma_i} \rangle$为一个1阶微分形式，即

$$\langle {\mathrm{d}\boldsymbol{L} \atop \sigma_i} \rangle=\sigma_{i1}\mathrm{d}x_1+\sigma_{i2}\mathrm{d}x_2+\sigma_{i3}\mathrm{d}x_3$$

证明：在笛卡儿坐标系$O-x_1x_2x_3$中，考虑空间任一点o，过o点作微小的领域Ω，并设$\partial\Omega$为Ω的具有正方向的边界，则由高斯公式

$\langle\partial\Omega,\omega\rangle=\langle\Omega,\mathrm{d}\omega\rangle$（这里的$\mathrm{d}\omega$为$\omega$的外微分）得，

$$\langle \Omega, \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\nabla \circ \sigma_i} \rangle \rangle = \langle \partial\Omega, \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\sigma_i} \rangle \rangle = \langle \Omega, \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{0} \rangle \rangle$$

其中，$\sigma_i = \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\sigma_i} \rangle = \sigma_{i1}\mathrm{d}x_1 + \sigma_{i2}\mathrm{d}x_2 + \sigma_{i3}\mathrm{d}x_3$（$i=1, 2, 3$）

又因为，

$$\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\nabla \circ \sigma_i} \rangle = \mathrm{d}\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\sigma_i} \rangle = \mathrm{d}^* \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\sigma_i} \rangle = \mathrm{D}_{12} \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\sigma_i} \rangle,$$

$$\mathrm{d}^* \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\sigma_i} \rangle = \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

在弹性力学中，无体力时空间平衡微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

所以，采用广义微分描述的无体力空间平衡微分方程为：

$$\mathrm{D}_{12} \langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\sigma_i} \rangle = 0$$

5 结 论

矢量分析与现代代数的发展，尤其是外微分、Hodge 星算子和余微分的发展，使得许多力学现象的描述变得更为简单。广义算子 D 的引入与广义微分的提出，统一了经典的微分、外微分、Hodge 星算子和余微分，为矢量方程的研究提供了一种新的思路。

参考文献：

[1] Gibbs J W. Elements of Vector Analysis [M]. New York: Dover Publication, 1961.

[2] Wilson E B. Vector Analysis [M]. New York: Dover Publication, 1901.

[3] 班书昊，李晓艳. 外积与外微分的性质研究及其应用 [J]. 江苏工业学院学报，2005，17（1）：55－57.

[4] 郭友中，李清溪. 数学物理方法 [M]. 武汉：武汉大学出版社，1993.

Unified Form of Generalized Differential and its Application in Elastic Mechanics

BAN Shu－hao，LI Xiao－yan

（Department of Mechanical Engineering，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213016，China）

Abstract: Exterior differential，Hodge star－operator and residual differential are introduced，and the unified form of generalized differential is put forward in this paper. Finally，Laplace operator is interpreted by generalized differential，and expression of equivalent describing balanced differential equation of space elastic mechanics is obtained.

Key words: exterior differential；Hodge star－operator；residual differential；generalized differential