第 17 卷第 2 期　　江 苏 工 业 学 院 学 报　　Vol. 17 No. 2
2005 年 6 月　　JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Jun. 2005

文章编号：1005－8893（2005）02－0047－03

一类非线性差分方程解的性质*

吴春青
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：利用自共轭二阶线性差分方程的一些结论，研究了形如$\Delta^2 x_n + a_n x_{n+1}^{\gamma} = f_n$ 的差分方程的无界解，有界解的存在性及这类解的渐近性质。这类方程可看作 Emden－Fowler 微分方程的带强迫项的离散形式。

关键词：差分方程；有界解；无界解；渐近性质
中图分类号：O 241.3　　文献标识码：A

Emden－Fowler 微分方程[1]是指形如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+q(t)u^{\gamma}=0,\quad t\geqslant 0 \tag{1}$$

的微分方程。这里 $p(t)$，$q(t)$ 为连续的正值函数，γ 为大于 0 的常数。通过变换方程（1）可转化为如下的简单形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+a(t)x^{\gamma}=0,\quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

方程（2）离散后对应的差分方程为

$$\Delta^2 x_n + a_n x_{n+1}^{\gamma}=0 \tag{3}$$

这里 Δ 为前向差分算子，即 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$，$a_n \geqslant 0$，$n\geqslant N$，$N$ 为某自然数，$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$。差分方程的解 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 为一个数列，以后将简记为 x。关于方程（3）的解的振动性，渐近性质可参考文献 [2，3]。自共轭二阶线性差分方程形如

$$\Delta(c_n \Delta x_n) + p_n x_{n+1} = 0 \tag{4}$$

方程（4）是微分方程

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0 \tag{5}$$

的离散形式。对方程（4），（5）的解的有关性质可参考文献 [4～8] 及其中所引文献。

在下文中将研究带有强迫项的差分方程

$$\Delta^2 x_n + a_n x_{n+1}^{\gamma} = f_n \tag{6}$$

解的有界性，振动性及渐近性质。主要的思想是将方程（6）看作方程（4）的简单形式（即在方程（4）中 $c_n \equiv 1$，$p_n \equiv 0$，$n=1，2，3，\cdots$）

$$\Delta^2 x_n = 0 \tag{7}$$

的扰动来研究方程（6）的解的有界性，振动性与渐近性质。

1　主要结论

引理 1[4]：设方程（4）非振动，则方程（4）存在主解与非主解 x，y，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$。对于方程（7），显然 $x_n=\alpha$，$y_n=\beta n$ 为主解与非主解，这里 α，β 为初值决定的常数。

引理 2[3]：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty$时，方程（3）有一个有界的非振动解 x，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，$c$ 为常数。

引理 3：设 s，$t\in[a, b]$，$a > a_0 > 0$，则$|s^{\gamma} - t^{\gamma}| < M\gamma|s-t|$，这里 a_0，M 为正的常数。

证明：对 $f(x)=x^{\gamma}$ 在区间 $[a, b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，得$|s^{\gamma}-t^{\gamma}| = |\gamma\zeta^{\gamma-1}||s-t|$，这里 $\zeta\in(a, b)$，又由于 $a > a_0 > 0$，所以存在正数 M，使得$|\gamma\zeta^{\gamma-1}| < M\gamma$。引理证毕。

1.1　无界解的存在性与渐近性质

定理 1：设 $\gamma > 0$，$a_n > 0$，n 为自然数，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\gamma+1} a_n < \infty \tag{8}$$

又设

* 收稿日期：2005－01－10
作者简介：吴春青（1972－），男，安徽歙县人，硕士，讲师，主要研究方向为差分方程的性质。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nf_n < \infty \tag{9}$$

则方程（6）有一个无界的非振动解 x，且具有渐近性质 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=c$，$c>0$ 常数。

证明：由引理 1，设 x，y 分别为方程（7）的主解与非主解，则

$$x_n=O(1),\ y_n=O(n) \tag{10}$$

这里及后文中 O，o 为 $n\to\infty$ 时的 Laudau 记号。构造映射 T

$$(Tz)_n=\alpha x_n+\beta n+\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k-n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_kz_{k+1}^{\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}z_k^{\gamma} \tag{11}$$

上式中，α，β 为任取的常数，在后面的证明中将给出 N 的取法。直接验证可知，z 为方程（4）的解当且仅当 z 为映射 T 的不动点。下面证明不动点的存在性也即是无界非振动解的存在性。

考虑无穷数列 $w=\{w_n\}_{n=N}^{\infty}$ 按范数 $\|w\|=\sup_{n\geq N}\left\{\frac{w_n}{n}\right\}$ 构成的空间，易见这是一个 Banach 空间，记为 B。$w\in B$ 当且仅当 $w_n=O(n)$。再记

$$S=\left\{z=\{z_n\}:\frac{1}{2}\leqslant\frac{z_n}{n}\leqslant 2,\ n\geqslant N\right\} \tag{12}$$

S 为 B 的闭子集，在（11）式中取 $\beta=1$，即考虑映射

$$(Tz)_n=\alpha x_n+n+\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k-n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_kz_{k+1}^{\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}z_k^{\gamma} \tag{13}$$

将说明映射（13）式在 B 的闭子集 S 中有不动点。先说明 $TS\subset S$。

由（9）式，$\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k=O(1)$，于是对给定的常数 1，存在 N_1，当 $n\geqslant N_1$ 时（注意（10）式）

$$\left|\frac{\alpha}{n}x_n+\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k\right|<1 \tag{14}$$

考虑到 a_n，z_n 的非负性，由（8）式，（13）式，（14）式及 $z\in B$ 有

$$\frac{(Tz)_n}{n}\leqslant 2 \tag{15}$$

再由（12）式，得

$(Tz)_n\geqslant n-\left|\alpha x_n+\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k\right|-n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_k(2(k+1))^{\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}(2k)^{\gamma}$，由（9）式，可将（14）式右边的 1 改为 1/4（只要 N_1 再取大点，记这种 N_1 为 N'_1），又注意到（8）式，可取 N_2，$n\geqslant N_2$ 时，

$$\left|\sum_{k=N-1}^{n-2}a_k(2(k+1))^{\gamma}-\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}(2k)^{\gamma}\right|<\frac{1}{4},$$

于是可取 $N_3=\max\{N'_1,N_2\}$ 使得 $n\geqslant N_3$ 时 $\frac{1}{n}\left|\alpha x_n+\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k\right|-\sum_{k=N-1}^{n-2}a_k(2(k+1))^{\gamma+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}(2k)^{\gamma}<\frac{1}{2}$，于是 $(Tz)_n\geqslant n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$，即

$$\frac{(Tz)_n}{n}\geqslant\frac{1}{2} \tag{16}$$

于是可取 $N_4=\max\{N_1,N_3\}$，当 $n\geqslant N_4$ 时从（15）式，（16）式可知（13）式定义的映射 T 在 S 上为映上的。即 $TS\subset S$。

再说明由（13）式定义的映射 T 在 S 上为压缩的。取 u，$v\in S$，则

$$|(Tu)_n-(Tv)_n|\leqslant\left|n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_k(u_{k+1}^{\gamma}-v_{k+1}^{\gamma})\right|+\left|\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}(u_k^{\gamma}-v_k^{\gamma})\right|=I_1+I_2 \tag{17}$$

对 $I_1=\left|n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_k(u_{k+1}^{\gamma}-v_{k+1}^{\gamma})\right|$，利用范数定义及引理 3，有 $I_1\leqslant$

$n\sum_{k=N-1}^{\infty}(k+1)^{\gamma}a_k\left|\left(\frac{u_{k+1}}{k+1}\right)^{\gamma+1}-\left(\frac{v_{k+1}}{k+1}\right)^{\gamma+1}\right|\leqslant n\sum_{k=N-1}^{\infty}(k+1)^{\gamma}a_kM_1\gamma\|u-v\|$，$M_1$ 常数。再由（7）式，可取 N_5，使当 $n\geqslant N_5$ 时

$$I_1\leqslant\frac{n}{8}\|u-v\| \tag{18}$$

类似利用 B 上范数的定义及引理 3 和（8）式，可取 N_6，当 $n\geqslant N_6$ 时有

$$I_2=\left|\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}(u_k^{\gamma}-v_k^{\gamma})\right|\leqslant\frac{n}{8}\|u-v\| \tag{19}$$

然后取 $N_7=\max\{N_5,N_6\}$，则 $n\geqslant N_7$ 时，由（17）～（19）式，

$\frac{1}{n}|(Tu)_n-(Tv)_n|\leqslant\frac{1}{4}\|u-v\|$，即 $\|Tu-Tv\|\leqslant\frac{1}{4}\|u-v\|$，最后取 $N=\max\{N_4,N_7\}$，则当 $n\geqslant N$ 时，T 为 S 上的压缩映射。由压缩映射原理，在 S 上存在 T 的不动点 x，即方程（4）有一解 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$，且由（12）式，这个解为无界的且非振动。

再证明渐近性质。从证明可见，对任给的正数 ε 及给定的常数 c，构造

$$S'=\left\{z=\{z_n\}:c-\varepsilon\leqslant\frac{z_n}{n}\leqslant c+\varepsilon\right\}$$

仍可找到 N，使 $n\geqslant N$ 时，T 为 S' 上的压缩映射。从而方程（4）有解 x_n，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=c$。

1.2 有界解的存在性与渐近性质

由引理 2，可以得到方程（6）的有界解的存在性及其渐近性质：

定理 2：设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_k$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2f_k$ 收敛，则方程（6）有一个有界的非振动解 x 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，$c>0$ 为常数。

证明：对映射（11）稍作变动，构造映射

$$(Tz)_n=c+\sum_{k=n}^{\infty}(y_nx_{k+1}-x_ny_{k+1})f_k-n\sum_{k=N-1}^{n-2}a_kz_{k+1}^{\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}ka_{k-1}z_k^{\gamma}\qquad(20)$$

这里 c 为大于 0 的常数，x_n，y_n 同定理 1。这个映射的不动点也是方程（6）的解。考虑由无穷数列 $w=\{w_n\}_{n=N}^{\infty}$ 按范数 $\|w\|=\sup\limits_{n\geqslant N}\{w_n\}$ 构成的Banach 空间 B，对任意给定的小于 c 的正数 ε，构造 B 的闭子集 $G=\left\{z=\{z_n\}:c-\varepsilon\leqslant z_n\leqslant c+\varepsilon\right\}$，将证明存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，映射（20）在 G 中有不动点。由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n<\infty$，知 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}ka_k\to0$，$n\to\infty$。而 $n\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_n<\sum\limits_{k=n}^{\infty}ka_k$，从而 $n\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k\to0$，$n\to\infty$。用这个结论处理（20）式中的第 2 个和式，类似于定理 1 的证明，可得映射（20）在 G 中有不动点，于是定理 2 的结论成立。

2 推论及注解

注解 1：在映射（13）中，不影响定理 1 的证明，可取 $\alpha=0$。

注解 2：在定理 1 中，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}kf_k<\infty$的条件可适当放宽，即有

推论 1：若（8）式成立且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 收敛，$\sup\limits_{n\geqslant N}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}kf_k=o(1)$，$N$ 为某自然数（如 N 取作定理 1 证明中取得的 N），则方程（6）有一无界的非振动解 x，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=c$，这里 $c>0$ 常数。

注解 3：定理 2 中关于数列$\{f_n\}$的条件也可类似于推论 1，适当放宽。

参考文献：

[1] Wong J S W. On the Generalized Emden—Fowler Equation [J]. SIAM Review, 1975, 17 (2): 339—360.

[2] 吴春青. Emden—Fowler 差分方程的非振动解 [J]. 江苏石油化工学院学报, 2002, 14 (3): 57—58.

[3] John W Hooker, Patula W T. A Second Order Nonlinear Difference Equation: Oscillation and Asymptotic Behavior [J]. J Math Anal Appl, 1983, 91 (1): 9—29.

[4] Patula W T. Growth and Oscillation Properties of Second Order Difference Equations [J]. SIAM J Math Anal, 1979, 10 (6): 1 272—1 279.

[5] Chen Shaozhu, Erbe L H. Riccati Type Techniques and Discrete Oscillations [J]. J Math Anal Appl, 1989, 142 (2): 468—487.

[6] 陈绍著. 二阶线性差分方程解的渐近线性 [J]. 数学学报, 1992, 35 (3): 396—406.

[7] Chen Shaozhu, Wu Chunqing. Riccati Techniques and Approximation for a Second Order Poincaré Equation [J]. J Math Anal Appl, 1998, 222 (1): 177—191.

[8] Huang Chunchao. Oscillation and Nonoscillation for Second Order Linear Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 1997, 210 (3): 712—723.

Properties of Solutions for Certain Nonlinear Difference Equations

WU Chun—qing

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou, 213016, China)

Abstract: The existence and asymptotic behavior of bounded and unbounded solutions for difference equation $\Delta^2x_n+a_nx_{n+1}^{\gamma}=f_n$ were obtained. The equation of this type was viewed as perturbation of the second order self adjoint difference equation.

Key words: difference equation; bounded solution; unbounded solution; asymptotic behavior