

文章编号: 1005—8893 (2005) 02—0054—04

具疾病年龄结构和隔离的 SIQS 模型分析^{*}

王世飞, 邹定宇

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 建立和研究了具疾病年龄结构和隔离的 SIQS 模型。运用微分方程和积分方程中的理论和方法, 得到基本再生数 R_0 的表达式, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 存在全局渐近稳定的无病平衡点。当 $R_0 > 1$ 且 $\gamma(\theta) = c$ 时, 存在局部渐近稳定的地方病平衡点。

关键词: 疾病年龄; 隔离; 流行病模型; 阈值; 平衡点; 稳定性

中图分类号: O 175. 1

文献标识码: A

众所周知, 传染病的存在历来就是一种十分普遍的现象。许多传染病造成的后果相当严重, 如中世纪曾蔓延于欧洲的黑死病就夺去了成千上万人的性命。在我国, 据统计有数百万人患有乙肝或为乙肝病毒携带者。因此, 研究传染病的发病机理、传染途径, 从而提出有效的控制方法与治疗方案, 就成为一项十分有意义的工作。通过建立数学模型对传染病进行定性与定量的研究是一种十分重要的方法, 并且已经取得了很多好的结果, 这方面的工作可参看文献 [1~9]。

现实生活中有些疾病只在成人中传播, 如性病等。疾病的有些传播现象如垂直传染和预防疾病的某些措施如按年龄接种疫苗等, 不能很好地用常微分方程来描述, 因此研究年龄结构的流行病模型有其必要性和现实意义。本文引入一个疾病带年龄结构的 SIQS 模型, 运用微分方程和积分方程中的理论和方法得到基本再生数 R_0 的表达式, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 存在全局渐近稳定的无病平衡点。当 $R_0 > 1$ 且 $\gamma(\theta) = c$ 时, 存在局部渐近稳定的地方病平衡点。

1 模 型

把所研究的国家或地区的总人口分为易感者、染病者、隔离者 3 类, 用 $S(t)$, $Q(t)$ 分别表示 t 时刻易感者, 隔离者全体, $i(\theta, t)$ 表示 t

时刻染病年龄为 θ 的人。记 $I(t) = \int_0^\infty i(\theta, t) d\theta$, 则 $I(t)$ 表示 t 时刻染病者全体, t 时刻的总人口数为 $N(t)$, $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t)$ 。

由仓室建模思想和文献 [7] 可建立如下具疾病年龄结构和隔离的流行病传播的数学模型:

$$\begin{aligned} S'(t) &= \Lambda - \lambda(t)S(t) - \mu S(t) + \int_0^\infty \gamma(\theta)i(\theta, t)d\theta + cQ(t) \\ i_\theta(\theta, t) + i_t(\theta, t) &= -(\gamma(\theta) + \mu + \delta(\theta))i(\theta, t) \\ Q'(t) &= -cQ(t) - \mu Q(t) + \int_0^\infty \delta(\theta)i(\theta, t)d\theta \\ i(0, t) &= \lambda(t)S(t) \\ \lambda(t) &= \frac{\int_0^\infty \rho(\theta)i(\theta, t)d\theta}{N(t)} \end{aligned} \quad (1)$$

这里, μ 表示人口的自然死亡率, $\gamma(\theta)$ 表示染病期为 θ 的人的康复率, c 表示隔离者的康复率, $\delta(\theta)$ 表示染病期为 θ 的人的隔离率, $\lambda(t)$ 表示疾病的感染力。假设所有的参数都是非负的, 且有 $\gamma(\theta)$, $\delta(\theta)$ 是一个关于 θ 的非负有界函数, 记 $S(0) = S_0$, $i(\theta, 0) = i_0$, $Q(0) = Q_0$ 。

模型的第 1 个方程反映了易感类人群中的成员因死亡和变成染病类的成员而减少; 第 2 个方程反映了染病类人群中的成员因易感类的感染成为感染

* 收稿日期: 2005—03—07

作者简介: 王世飞 (1977—), 女, 山西长治人, 硕士, 主要从事生物数学方向的研究。

类而增加, 因死亡、康复和变成隔离类人群中的成员而减少; 第 3 个方程反映了隔离类人群中的成员因染病类成员被隔离成为隔离类而增加, 因死亡和康复而减少。所以这是 1 个患病后不导致死亡、病愈后没有获得永久免疫而会被重新感染的流行病模型。

对系统 (1) 第 2 个方程沿特征线积分得

$$i(\theta, t) = \begin{cases} i_0(\theta - t) \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta - t)}, & \theta \geq t \\ v(t - \theta) K_0(\theta), & \theta < t \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$K_0(\theta) = e^{-\mu\theta - \int_0^\theta \gamma(\tau) d\tau - \int_0^\theta \alpha(\tau) d\tau} \quad (3)$$

$$v(t) = i(0, t) = \lambda(t) S(t)$$

把 (2) 式和 (3) 式代入系统 (1) 的第 3 个方程得

$$Q'(t) = -\mu Q(t) - \int_0^t K_1(\theta) v(t - \theta) d\theta + F_1(t) - cQ(t)$$

$$v(t) = \frac{S(t)}{N(t)} \int_0^t K_2(\theta) v(t - \theta) d\theta + F_2(t) \quad (4)$$

其中

$$K_1(\theta) = \alpha(\theta) K_0(\theta)$$

$$K_2(\theta) = \rho(\theta) K_0(\theta)$$

$$F_1(t) = \int_t^\infty i_0(\theta - t) \frac{K_1(\theta)}{K_0(\theta - t)} d\theta \quad (5)$$

$$F_2(t) = \int_t^\infty i_0(\theta - t) \frac{K_2(\theta)}{K_0(\theta - t)} d\theta$$

易知 $F_1(t), F_2(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} F_2(t) = 0$ 。

对系统 (1) 的第 2 个方程从 0 到 ∞ 关于 θ 积分得

$$I'(t) = \lambda(t) S(t) - \mu I(t) - \int_t^\infty \gamma(\theta) i(\theta, t) d\theta - \int_t^\infty \alpha(\theta) i(\theta, t) d\theta \quad (6)$$

其中 $I(t) = \int_0^\infty i(\theta, t) d\theta$ 。

注意到

$$S(t) = N(t) - Q(t) - I(t) = N(t) - Q(t) - \int_0^t v(t - \theta) K_0(\theta) d\theta + F_3(t) \quad (7)$$

其中 $F_3(t) = \int_t^\infty i_0(\theta - t) \frac{K_0(\theta)}{K_0(\theta - t)} d\theta$ 。

易知 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_3(t) = 0$ 。

把系统 (1) 的第 2 个方程两边积分并和其他两个方程相加得 $N'(t) = \Lambda - \mu N(t)$ 。

把 (7) 式代入 (4) 式的第 2 式得

$$v(t) = \frac{N(t) - Q(t) - \int_0^t v(t - \theta) K_0(\theta) d\theta}{N(t)} \int_0^t K_2(\theta) v(t - \theta) d\theta + F_4(t) \quad (8)$$

其中 $F_4(t) = F_2(t) - \frac{F_3(t)}{N(t)} \int_0^t K_2(\theta) v(t - \theta) d\theta$ 。

由于 $F_4(t)$ 是 $F_2(t)$ 和 $F_3(t)$ 的系数有界的线性函数, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} F_4(t) = 0$ 。

用系统

$$v(t) = \frac{N(t) - Q(t) - \int_0^t v(t - \theta) K_0(\theta) d\theta}{N(t)} \int_0^t K_2(\theta) v(t - \theta) d\theta + F_4(t) \quad (9)$$

$$Q'(t) = -\mu Q(t) - \int_0^t K_1(\theta) v(t - \theta) d\theta + F_1(t) - cQ(t)$$

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t)$$

代替系统 (1), 下面来研究系统 (9)。

2 平衡点

由文献 [6] 系统 (9) 的极限系统为

$$v(t) = \frac{N(t) - Q(t) - \int_0^\infty v(t - \theta) K_0(\theta) d\theta}{N(t)} \int_0^\infty K_2(\theta) v(t - \theta) d\theta$$

$$Q'(t) = -\mu Q(t) - \int_0^\infty K_1(\theta) v(t - \theta) d\theta - cQ(t)$$

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t) \quad (10)$$

由文献 [10] 知系统 (9) 的平衡点若存在必为极限系统 (10) 的常数解。假设 v^*, Q^*, N^* 是系统 (10) 的常数解, 则满足

$$\begin{cases} v^* = \frac{N^* - Q^* - v^* \kappa_0}{N^*} \kappa_2 v^* \\ 0 = -\mu Q^* - \kappa_1 v^* - cQ^* \\ 0 = \Lambda - \mu N^* \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\kappa_i = \int_0^\infty K_i(\theta) d\theta, i = 0, 1, 2$ 。

系统 (11) 总存在边界平衡点 $E^0 = (v^0, Q^0, N^0)$ 。

其中 $v^0 = 0, Q^0 = 0, N^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$, 记再生数 $R_0 = \kappa_2$ 。

经计算, 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (11) 存在正平

衡点 $E^* = (v^*, Q^*, N^*)$ 。

其中 $v^* = \frac{\mu+c}{\kappa_1} Q^*$, $Q^* = \frac{\Lambda(R_0-1)}{\mu \left[1 + \frac{\kappa_0}{\kappa_1} (\mu+c) \right] \kappa_2}$,

$N^* = \frac{\Lambda}{\mu}$ 。

相应的由 (2) 式得 $i^*(\theta) = v^* K_0(\theta)$,

$S^* = N^* - Q^* - \int_0^\infty i^*(\theta) d\theta$ 。

3 平衡点的稳定性分析

为了证明平衡点 E^0 全局渐近稳定性, 引入如下 2 个引理。记 $f_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)$, $f^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 。

引理 1^[6]: 假设 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ 是有界的, $K \in L^1(0, \infty)$ 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^t K(\theta) f(t-\theta) d\theta \right| \leq$$

$$\|f\|^\infty \|K\|_{L^1(0, \infty)}$$

引理 2^[6]: 假设 $f: [0, \infty) \rightarrow R$ 是有界和二次可微且二阶导数有界。若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $t_n \rightarrow \infty$ 且 $f(t_n) \rightarrow f^\infty$ 则 $f'(t_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ 。

定理 1: 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点全局吸引。

证明: 由 (4) 式中的第 2 式

$$v(t) = \frac{S(t)}{N(t)} \int_0^t K_2(\theta) v(t-\theta) d\theta + F_2(t)$$

因 $v(t)$ 非负有界, 且 $\frac{S(t)}{N(t)} \leq 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} F_2(t) = 0$ 。由文献 [6] 知 $v^\infty \leq \kappa_2 v^\infty$ 。

所以当 $\kappa_2 = R_0 < 1$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ 。

由文献 [6] 选取数列 $t_n \rightarrow \infty$, $s_n \rightarrow \infty$, 使得 $Q(s_n) \rightarrow Q^\infty$, $Q(t_n) \rightarrow Q_\infty$, $Q'(s_n) \rightarrow 0$, $Q'(t_n) \rightarrow 0$, 因为当 $t \rightarrow \infty$ 时 $v(t)$, $F_1(t)$ 都趋于零, 所以由系统 (9) 的第 2 个方程有 $0 = -(\mu+c) Q^\infty$, $0 = -(\mu+c) Q_\infty$ 。

所以 $Q^\infty = Q_\infty = 0$ 。

同理可以得 $N^\infty = N_\infty = \frac{\Lambda}{\mu}$ 。

所以无病平衡点全局吸引, 证毕。

定理 2: 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点局部渐近稳定。

证明: 对系统 (10) 在 E^0 处线性化得下列特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-K_2 & 0 & 0 \\ -K_1 & \lambda+\mu+c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\mu \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

其中 $K_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} K_1(\theta) d\theta$, $K_2 = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} K_2(\theta) d\theta$ 。

方程 (12) 等价于 $(\lambda+\mu)(1-K_2(\lambda+\mu+c)) = 0$ 。

注意到 $|K_2| < \kappa_2$ ($R_0 \geq 0$)。

所以当 $R_0 < 1$, 无病平衡点局部渐近稳定。证毕。

定理 3: 若 $R_0 > 1$ 且 $\gamma(\theta) = c$, 地方病平衡点局部渐近稳定。

证明: 假设 $R_0 > 1$, 地方病平衡点 E^* 存在, 在 E^* 处线性化系统 (10) 得

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{K_2}{\kappa_2} + \frac{v^*}{N^*} K_2 \kappa_0 & \frac{v^*}{N^*} \kappa_2 & 0 \\ -K_1 & \lambda + \mu + c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

方程 (13) 等价于

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \\ & \left[(\lambda + \mu + c) \left(1 - \frac{K_2}{\kappa_2} + \frac{v^*}{N^*} K_2 \kappa_0 \right) + \frac{v^*}{N^*} K_1 \kappa_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

显然只需证明方程

$$(\lambda + \mu + c) \left[1 - \frac{K_2}{\kappa_2} + \frac{v^*}{N^*} K_2 \kappa_0 \right] + \frac{v^*}{N^*} K_1 \kappa_2 = 0 \quad (15)$$

没有实部大于或等于零的根。事实上, 由于

$$K_1 = 1 - (\lambda + \mu + \gamma(\theta)) K_0 \quad (16)$$

把 (16) 式代入 (15) 式, 令 $\gamma(\theta) = c$ 整理后得

$$1 + \frac{v^*}{N^*} \frac{\kappa_2}{\lambda + \mu + c} = \frac{K}{\kappa_2} \quad (17)$$

对 (17) 式两边取模得

$$\left| 1 + \frac{v^*}{N^*} \frac{\kappa_2}{\lambda + \mu + c} \right| = \left| \frac{K}{\kappa_2} \right|$$

易知对任意的 λ ($\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$), 右边 > 1 , 左边 ≤ 1 。

所以特征方程 (13) 没有实部大于或等于零的根, 地方病平衡点局部渐近稳定。证毕。

由定理 2, 如果参数满足 $R_0 < 1$, 则在大时间以后疾病将会消除; 如果参数满足 $R_0 > 1$ 且 $\gamma(\theta) = c$, 则由定理 3, 在大时间以后疾病将会形成一种地方病而永远流行。

参考文献:

[1] Haderl K. Pair Formation with Maturation Period [J]. J Math Biol, 1993, 32: 1-15.

[2] Iannelli M, Martcheva M. A Semigroup Approach to the Well-posedness of the Two-Sex Population Model [J]. Dynam Sys

Appl. 1997, 5: 353–370.

[3] Iannelli Mimmo, Kim Mi–Young, Park Eun–Jae. Asymptotic Behavior for an SIS Epidemic Model and its Approximation [J]. Nonlinear Analysis. 1999, 35: 797–814.

[4] EI–Doma M. Analysis of Nonlinear Integro–Differential Equations Arising in Age–Dependent Epidemic Models [J]. Nonlinear Analysis. 1987, 11 (8): 913–937.

[5] EI–Doma M. Analysis of an Age–Dependent SI Epidemic Model with Disease–Induced Mortality and Proportionate Mixing Assumption [J]. International Journal of Applied Mathematics. 2000, 3 (3): 233–247.

[6] Feng Z, Iannelli M, Milnew F A. A Two–Strain Tuberculosis Model with Age of Infection [J]. J Appl Math. 2002, 62 (5): 1 634–1 656.

[7] Martcheva M. Exponential Growth in Age–Structured Two–Sex Populations [J]. Math Biosci. 1999, 157: 1–22.

[8] Inaba H. Threshold and Stability Results for an Age–Structured Epidemic Model [J]. J Math Biol. 1990, 28: 411–434.

[9] 沃松林 许波. 人口有增长的具有暂时免疫的流行病模型 (SIRS 模型) [J]. 江苏石油化工学院学报. 2002, 14 (2): 54–56.

[10] Miller R K. Nonlinear Volterra Integral Equations [M]. New York: W A Benjamin Inc. 1971.

An SIQS Epidemic Model with Quarantine and Avariable Infection Periods

WANG Shi–fei, ZOU Ding–yu

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: In this paper, an SIQS epidemic model with quarantine and variable infection periods was discussed. Under the assumption of constant birth of individuals in the population, the explicit formula of the reproductive number $R_0<1$ was obtained. It was proved that the disease–free equilibrium was globally asymptotically stable if $R_0<1$. The endemic equilibrium was locally asymptotically stable, if conditions $R_0>1$ and $\gamma (\theta) = c$ held.

Key words: age of latent; isolation; SEIQ epidemic model; threshold; steady states; stability