

文章编号: 1005-8893 (2005) 03-0038-03

次广义半正定矩阵^{*}

李 博

(江苏工业学院 信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要: 引进了次广义半正定矩阵的概念, 研究了它的基本性质及等价命题, 建立了 Schur 乘积定理, Open-heim 不等式, Minkowski 不等式及一些相应的结果.

关键词: 次广义半正定矩阵; 广义半正定矩阵, Hadamard 积

中图分类号: O 151.21

文献标识码: A

对称正定矩阵是一类重要的矩阵, 有着广泛的应用, 但随着其它学科(如现代控制论等学科)的发展, 已不能满足应用上的需要, 已有不少学者从事研究未必对称的较为广义的正定矩阵^[1~7].

定义 1^[1]: 设 $A \in R^{n \times n}$, 若对任何的 $0 \neq x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^{n \times 1}$ 都有正对角矩阵 $D_x > 0$, 使 $x^T D_x A x \geq 0$ 则称 A 为广义半正定矩阵. 所有广义半正定矩阵的全体记为 S_D . 若 $D_x = D$ 与 x 无关, 则记为 $A \in S_D$.

人们研究矩阵, 一般都从主对角线方向考虑问题(如对角化, 正定性等), 至于次对角线方向的理论在信息论, 系统论, 现代控制论, 现代经济数学等众多学科中同样是有用的. 因此研究矩阵的次对角线方向的性质, 不仅在理论上, 而且在应用上都是很有必要的.

定义 2^[6]: 设 $A \in R^{m \times n}$, 则称 $n \times m$ 矩阵 (b_{ij}) (其中 $b_{ij} = a_{m-j+1, n-i+1}$) 为 A 的次转置矩阵, 记为 A^- . 若 $A^- = A$, 则称 A 是次对称矩阵. 若 $A^- = -A$, 则称 A 是反次对称矩阵.

有定义得到^[6]:

- (1) $(A^-)^- = A$, $(A+B)^- = A^- + B^-$,
 $(AB)^- = B^- A^-$, $(A^{-1})^- = (A^-)^{-1}$;
- (2) $J^- = J$, $J' = J$, $J^{-1} = J$, $J^2 = I$,
 $J_n A^- J_m = A'$ (A 为 $m \times n$ 矩阵).

此处 J_n 表示次对角线上元素全为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶矩阵.

定义 3^[6]: 设 $A \in R^{n \times n}$, 且 $A = A^-$. 若对任何的 $0 \neq X \in R^{n \times 1}$, 有 $X^- A X \geq 0$ 则称 A 是次对称次半正定矩阵(记为 S_S^-).

1 次广义正定矩阵

定义 4: 设 $A \in R^{n \times n}$, 若对任何的 $0 \neq X \in R^{n \times 1}$ 都有正对角矩阵 $D_x > 0$, 使 $X^- D_x A X \geq 0$ (> 0) 则称 A 为次广义(半)正定矩阵. 记为 S_D^- . $D_x = D$ 与 x 无关, 则记为 $A \in S_D^-$.

命题 1: $S_S^- \subset S_I^- \subset S_D^- \subseteq S_D^-$.

其中 S_I^- 表示定义 4 中的 D 恒为单位矩阵的次广义半正定矩阵(次亚半正定矩阵)的集合.

证明: 设 $A = A^-$, 即知 $S_S^- \subseteq S_I^-$. 若取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

则对任何 $0 \neq X \in R^{n \times 1}$, 都有
 $X^- A X = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$

因此 $A \in S_I^-$, 但 $A^- \neq A$, 即 $A \notin S_S^-$. 故 $S_S^- \subset S_I^-$.

* 收稿日期: 2005-05-30

作者简介: 李博(1978-), 女, 辽宁抚顺人, 助教.

显而易见 $S_I^- \subseteq S_D^-$. 再取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

则对任何 $0 \neq X \in R^{n \times 1}$, 都有

$$X^- D A X = \frac{1}{4} (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

因此 $A \in S_D^-$, 但当 $x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0$, x_1, x_2 不全为 0, 而 $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ 时

$$X^- A X = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 \right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 < 0$$

即 $A \notin S_I^-$, 故 $S_I^- \subset S_D^-$.

而 $S_D^- \subseteq S_D^-$ 是显而易见的, 于是命题得证.

定理 1: $A \in S_D^- \Leftrightarrow DA + A^- D^- \in S_S^- \Leftrightarrow$

$JDA \in S_I^-$ (S_I^- 是亚半正定阵的集合^[1]).

证明: 由 $X^- D A X = X^- \left(\frac{DA + (DA)^-}{2} \right) X =$

$$\frac{1}{2} X^- (DA + A^- D^-) X$$

由于 $(DA + A^- D^-)^- = DA + A^- D^-$ 及 $X^T J = X^-$ 即知

$$A \in S_D^- \Leftrightarrow DA + A^- D^- \in S_S^- \Leftrightarrow JDA \in S_I^-.$$

定理 2: 设 $A \in R^{n \times n}$, D 为 n 阶正对角矩阵, 则下述各点是互为等价的:

- (1) $A \in S_D^-$; (2) $DA \in S_I^-$; (3) $A^- D^- \in S_I^-$;
- (4) $A^- \in S_D^{-1}$; (5) $D^{-1} A^- \in S_I^-$; (6) $A (D^-)^{-1} \in S_I^-$;
- (7) 对任一个 n 阶正对角矩阵 D_1 , $D_1 A \in S_{DD_1}^{-1}$;
- (8) 对任一个 n 阶正对角矩阵 D_2 , $AD_2 \in S_{D_2}^{-1}$.

证明: (1) \Leftrightarrow (2) 有定义得.

(1) \Leftrightarrow (3): 由 $(X^- D A X)^- = X^- A^- D^- X$, 即得.

(3) \Leftrightarrow (5): 因为 $X^- A^- D^- X = X^- D D^{-1} X$, 即得.

$A^- D^- X = (D^- X)^- D^{-1} A (D^- X)$, 即得.

(5) \Leftrightarrow (4) 由 (1) \Leftrightarrow (2) 即得.

(5) \Leftrightarrow (6) 由 (2) \Leftrightarrow (3) 即得.

(1) \Leftrightarrow (7): $X^- D A X = X^- D D_1^{-1} D_1 A X$.

(1) \Leftrightarrow (8), 因为 $X^- D_2^- D A D_2 X =$

$(D_2 X)^- D A (D_2 X)$, 可得. 证毕.

定理 3: 设 A, B 是两个 n 阶次广义 (半) 正定矩阵. 则 $\forall k \in R, \forall t \in [0, 1]$ 有 $A + B, tA + (1-t)B$ 均为次广义 (半) 正定矩阵. 因而 n 阶次广义 (半) 正定矩阵集是一凸集.

证明: 因为 $\forall 0 \neq X \in R^{n \times 1}$ 有

$$X^- D (A + B) X = X^- D A X + X^- D B X > 0 (\geq 0)$$

$$X^- D [tA + (1-t)B] X = tX^- D A X + (1-t)X^- D B X > 0 (\geq 0)$$

故定理 3 结论成立.

2 次广义正定矩阵的行列式的不等式

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶阵, 它们的 Hadamard 积: $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{n \times n}$ 在理论上与应用上虽有很多应用, 但由于以往的讨论主要对 A 与 B 是正定 (或半正定) 阵进行, 不能适应应用上, 特别是现代经济数学的需要. 下面讨论更一般的矩阵的曾证 A, B 是 n 阶实对称正定矩阵 Hadamard 积.

定理 4: 设 A, B 是两个 n 阶次广义正定矩阵

亦即 $A \in P_D^-, B \in P_{D_1}^-$, 则 A 与 $\frac{D_1 B + (D_1 B)^-}{2}$

的 Hadamard 乘积 $A \circ \frac{D_1 B + (D_1 B)^-}{2}$ 仍为次广义半正定矩阵.

证明: 因 $A \in P_D^-, B \in P_{D_1}^-$, 则 $JDA, JD_1 B$ 是亚半正定的. 于是有文献 [2] 知

$$(JDA) \circ \frac{JD_1 B + (JD_1 B)^-}{2} =$$

$$JD \left[A \circ \frac{D_1 B + (D_1 B)^-}{2} \right] \in S_I^-$$

又有定理 1 知

$$A \circ \frac{D_1 B + (D_1 B)^-}{2} \in S_D^-$$

推论 1: 设 A 是 n 阶次广义半正定矩阵, B 是 n 阶次对称次半正定矩阵, 则 $A \circ B$ 仍为次广义半正定矩阵.

推论 2: 设 A 是 n 阶次广义正定矩阵, B_i 是 n 阶次对称次正定矩阵 ($i = 1 \sim m$) 则 $A \circ B_1 \circ \cdots \circ B_m$ 仍为次广义正定矩阵.

推论 3: (Schur 的扩充) 设 A, B 是 n 阶对称次正定矩阵, 则 $A \circ B$ 为次对称次正定矩阵。

Open—Heim 曾证 A, B 是 n 阶实对称正定矩阵, 则 $|A \circ B| \geq |A| b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$, 而文献 [2] 扩充了上述结果。证明 A 是 n 阶实对称正定矩阵, B 是 n 阶亚正定矩阵, 则 $|A \circ B| \geq |A| b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$ 。对于次广义正定矩阵有:

定理 5: 设 A 是 n 阶对称次正定矩阵, B 是 n 阶次广义正定矩阵, 则

$$|A \circ B| \geq |A| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n}$$

($n=4k$ 或 $n=4k+1$)

$$|A \circ B| \leq |A| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n}$$

($n=4k+2$ 或 $n=4k+3$)

证明: 由定理 1 知 JA 是 n 阶实对称正定矩阵, 而 $JDB \in P_I$ 。有文献 [2] 知

$$(JA) \circ (JDB) |^{-1} \times |JA| |D| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n} =$$

$$|D|^{-1} |D| |A \circ B|^{-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} |A|$$

$$b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n} =$$

$$|A \circ B|^{-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} |A| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n} \geq 0$$

所以定理 5 结论成立。

推论 4: 设 A, B 是 n 阶对称次正定矩阵, 则

$$|A \circ B| \geq |A| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n}$$

($n=4k$ 或 $n=4k+1$)

$$|A \circ B| \leq |A| b_{n1} b_{(n-1)2} \cdots b_{1n}$$

($n=4k+2$ 或 $n=4k+3$)

Minkowski 曾证 A, B 是 n 阶实对称正定矩

阵, 则 $|A+B| \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$, 而文献 [2] 扩充了上述结果。证明 A 是 n 阶实对称正定矩阵, B 是 n 阶亚正定矩阵, 则 $|A+B| \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$ 。对于次广义正定矩阵, 类似的证明有:

定理 6: 设 A, B 是 n 阶次广义正定矩阵 ($A, B \in P_D^-$) 且 $(DB) \in P_S^-$, 则

$$|A+B| \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$$

($n=4k$ 或 $n=4k+1$)

$$(-|A+B|)^{\frac{1}{n}} > (-|A|)^{\frac{1}{n}} + (-|B|)^{\frac{1}{n}}$$

($n=4k+2$ 或 $n=4k+3$)

参考文献:

- [1] 佟文廷. 广义正定矩阵 [J]. 数学学报, 1984, 6 (27): 801—810.
- [2] 屠伯坝. 亚正定矩阵 [J]. 数学学报, 1990, 33 (4): 462—471.
- [3] Fiedler M, Pták V. On Matrices with Non—Positive Off—Diagonal Elements and Positive Principal Minors [J]. Czech Math J, 1962, 12: 382—400.
- [4] 李炯生. 实方阵的正定性 [J]. 数学的实践与认识, 1985, 14 (3): 67.
- [5] 屠伯坝. 亚正定矩阵 [J]. 数学学报, 1991, 34 (1): 91—102.
- [6] 秦兆华. 关于次对称矩阵与反次对称矩阵 [J]. 西南师范学院学报 (自然科学版), 1985, 5 (1): 100—110.
- [7] Pullman G J. Matrix Theory and its Applications [M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1976.
- [8] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.

Meta—Generalized Semi—Positive Definite Matrix

LI Bo

(Department of Information Science, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213016, China)

Abstract: Meta—generalized semi—positive definite matrix is introduced. Some properties and necessary and sufficient conditions are presented, and the corresponding Schur product theorem, Openhiem inequality, Minkowski inequality outcomes are established.

Key words: meta—generalized semi—positive definite matrix; generalized semi—positive definite matrix; Hadamard product