文章编号：1005－8893（2006）01－0055－03

奇异摄动系统稳定性界

涂庆伟，郭淑娟
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213016）

摘要：考察了线性奇异摄动系统 $\dot{x}=A(\varepsilon)x$ 的 ε 稳定性，同时对扰动系统 $\dot{x}=(A(\varepsilon)+\Delta A)x$ 的鲁棒性问题进行了研究，运用代数矩阵和李亚普诺夫稳定性理论得到了相应的 ε－稳定性界和稳定鲁棒性界。实例分析验证了所提出结果的有效性。

关键词：奇异摄动系统；稳定性；稳定鲁棒性

中图分类号：TP 13；TP 202⁺.1　　**文献标识码**：A

Stability Bounds of Singularity Perturbed Systems

TU Qing－wei，GUO Shu－juan
（Department of Information Science，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213016，China）

Abstract: In this paper, both the ε－stability of linear singularly perturbed systems $\dot{x}=A(\varepsilon)x$ and the robustness of uncertain systems $\dot{x}=(A(\varepsilon)+\Delta A)x$ are investigated. Based on matrix theory and LYAPUNOV stability theory, ε－stability bounds and stability robustness bounds are obtained respectively. Several examples are given to illustrate the proposed results.

Key words: singularly perturbed systems; stability; stability robustness

在处理工程实际问题中（如柔性机器人和航天工程），得到的系统状态模型部分变量关于时间的导数含有 1 个小参数 ε（$0<\varepsilon\ll 1$），称此类系统为奇异摄动系统。如线性奇异摄动系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A_{11}x_1+A_{12}x_2\\ \varepsilon\dot{x}_2=A_{21}x_1+A_{22}x_2\end{cases}\tag{1}$$

或

$$\dot{x}=A(\varepsilon)x\tag{2}$$

其中，$x_1\in R^{n_1}$，$x_2\in R^{n_2}$，$A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$（$i=1,2$；$j=1,2$），$x=(x_1^T,x_2^T)^T$，$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21} & \frac{1}{\varepsilon}A_{22}\end{bmatrix}$，ε 为摄动小参数。分析奇异摄动系统最常用的方法是时间尺度分解法[1]，主要思想是：首先忽略系统的快变量降低系统阶数，然后引入边界层方程校正以保证降阶系统解逼近原系统解的相对精确性。对系统（1），首先，令 $\varepsilon=0$，假设 A_{22}^{-1} 存在，得降阶方程：

$$\dot{x}_{1s}=A_0x_{1s},\quad (A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\tag{3}$$

再设 $x_{2f}=x_2+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x_{1s}$，对时间 t 求导，同乘 ε，令 $\varepsilon\to 0$，得 $\varepsilon\frac{d}{dt}x_{2f}=A_{22}x_{2f}$，令 $dT=\frac{dt}{\varepsilon}$，考虑到参数 ε 较小时，$dT$ 将会很大，称

$$\frac{d}{dT}x_{2f}=A_{22}x_{2f}\tag{4}$$

为快子系统。由降阶系统（3）和边界层系统（4）可以逼近原系统（1）的解[2]，且有

$$\begin{cases}x_1(t,\varepsilon)=x_{1s}(t,\varepsilon)+0(\varepsilon)\\ x_2(t,\varepsilon)=x_{2f}(t,\varepsilon)+0(\varepsilon)\end{cases}\tag{5}$$

收稿日期：2005－07－08
作者简介：涂庆伟（1978－），男，河南郏县人，硕士，主要从事神经网络控制研究。

这里 $0(\varepsilon)$ 表示 ε 的至多同阶无穷小量。

基于上述思想，对系统（1）的分析可以通过其近似系统（3）、（4）来代替，考虑到实际问题一般忽略快变量的分析，必然降低问题的复杂性；但同时应该看到，小参数 ε 影响了解的逼近精度及相关性质。一个重要的问题是：若近似系统（3）是稳定的，则原系统得稳定性如何。文献［1］指出，若降阶系统（3）和边界层系统（4）是稳定的，则必存在一个正数 ε^*，当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$ 时，原系统（1）是稳定的。因此，ε^* 的寻求是分析奇异摄动系统的关键，而且从（5）式来看，ε^* 的确定保证了降阶系统（3）近似代替原系统的有效性。

ε^* 的确定即 ε—稳定性界问题获得了广泛的关注[3~6]，主要基于时域和频域两类方法，它们共同的特点是基于系统（1）可以分解，即 A_{22}^{-1} 存在，这必然限制在实际中的应用。本文结合 LYAPUNOV 稳定性及矩阵理论提出了一种确定 ε—稳定性界的方法，不需要对（1）进行降阶分解，从而有更广泛的适用性。对 $\dot{x}=(A(\varepsilon)+\Delta A)x$，基于相同的方法给出了其稳定鲁棒性界。最后用 MATLAB 数学软件进行了数值计算，进一步说明所提出方法的有效性。

1 奇异摄动系统稳定性界

1.1 几个引理

对矩阵 $A_{m\times n}$ 及 $B_{p\times n}$，称 $A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}$ 为 A，B 的 KRONNECKER 积。当 A，B 分别为 n 阶和 m 阶矩阵，有下定义：

定义 1：称 $A\oplus B=A\otimes I_m+I_n\otimes B$ 为 A，B 的 KRONNECKER 直和或张量和，特别，当 $A=B$ 时，称 $A\oplus A=A\otimes I_n+I_n\otimes A$ 为 A 的自张量和。

引理 1[7]：设矩阵 A 与 B 分别有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，则①$A\oplus B$ 有 mn 个特征值 $\lambda_k+\mu_l$，$k=1,2,\cdots,n$，$l=1,2,\cdots,m$；②$A\oplus B$ 有 n^2 个特征值 $\lambda_k+\lambda_l$，$k=1,2,\cdots,n$，$l=1,2,\cdots,n$。

引理 2[7]：线性系统 $x=Ax$ 的 LYPUNOV 方程 $AX+XA^{\mathrm{T}}=-W$（W 为正定矩阵）有唯一解的充要条件是 $\det(A\oplus A)\neq 0$。

1.2 ε—稳定性

现在来分析系统（1）的稳定性，由引理 2，若系统（1）是渐近稳定的，则有 $\det(A(\varepsilon)\oplus A(\varepsilon))\neq 0$。不妨设 $A(\varepsilon)$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，$k=n_1+n_2$，由引理 1，则 $\det(A(\varepsilon)\oplus A(\varepsilon))=\prod_{i,j=1}^{k}(\lambda_i+\lambda_j)$，从而不存在零特征值或纯虚特征值。令 $A(\varepsilon)=A_1+\frac{1}{\varepsilon}A_2$，这里

$A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，有 $A(\varepsilon)\oplus A(\varepsilon)=(A_1\oplus A_1)+\frac{1}{\varepsilon}(A_2\oplus A_2)$，记 $\mathcal{A}(\varepsilon)=A(\varepsilon)\oplus A(\varepsilon)$，$\mathcal{A}_1=A_1\oplus A_1$，$\mathcal{A}_2=A_2\oplus A_2$，则有 $\mathcal{A}(\varepsilon)=\mathcal{A}_1+\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}_2$，定义

$$\alpha=\min_i\{\alpha_i\mid\det(\alpha_i\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)=0,\ \alpha_i\in(0,+\infty)\}\tag{6}$$

若使（6）式成立的正数 α_i 不存在，定义 $\alpha=+\infty$。

定理 1：对奇异摄动系统（1），其稳定性界可以由（6）式所定义的正数 α 给出：①若存在 $\varepsilon_0\in(0,\alpha)$，使得 $A(\varepsilon_0)$ 是稳定的，此时稳定性界 $\varepsilon^*=\alpha$；②若 $\alpha=+\infty$，且存在 $\varepsilon_0\in(0,\alpha)$，使得 $A(\varepsilon_0)$ 是稳定的，那么稳定性界 $\varepsilon^*=+\infty$。

证明：①由于 $\det(\mathcal{A}(\varepsilon))=\det\left(\mathcal{A}_1+\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}_2\right)=\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n_1+n_2}\det(\varepsilon\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)$，考虑到 α 的定义，对任意 $\varepsilon\in(0,\alpha)$ 有 $\det(\mathcal{A}(\varepsilon))\neq 0$，此时若存在 $\varepsilon_0\in(0,\alpha)$ 使系统（1）为稳定的，那么对于所有的 $\varepsilon\in(0,\alpha)$，系统（1）为稳定的，否则，若存在 $\varepsilon_1\in(0,\alpha)$，使系统（1）不稳定，考虑到 $\mathcal{A}(\varepsilon)$ 的特征值 $\lambda(\mathcal{A}(\varepsilon))$ 关于 ε 的连续性，必存在介于 ε_0 和 ε_1 的 $\varepsilon_2\in(0,\alpha)$，使 $\det(\mathcal{A}(\varepsilon_2))=0$，与 α 的定义矛盾，所以稳定性界 $\varepsilon^*=\alpha$。结论②类似可以得证。

2 稳定鲁棒性

考察扰动系统

$$\dot{x}=(A(\varepsilon)+\Delta A)x\tag{7}$$

假设相应的标称系统 $x=A(\varepsilon)x$ 渐近稳定。定义 n 阶方阵 A 的奇异值分别为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$，且有 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$，$\mathrm{sp}(A)$ 表示 A 的谱集，$\|A\|=\sigma_1(A)$ 为 A 的谱范数。$\mu_A=\inf\{\|\Delta A\|,\ \mathrm{sp}(A+\Delta A)\cap\{j\omega\}\neq\Phi\}$，这里 j 为虚数单位，$\omega\in R$，若矩阵 A 是稳定的，则 $\mu_A>0$；若令

$\mu_1=\inf\ \{\|\Delta \boldsymbol{A}\|,\ sp\ (\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A})\ \cap\ \{0\}\neq\Phi\}$，
$\mu_2=\inf\ \{\|\Delta \boldsymbol{A}\|,\ sp\ (\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A})\ \cap\ \{\{j\omega\}-\{0\}\}\neq\Phi\}$，易知 $\mu_A=\min\ \{\mu_1,\ \mu_2\}$，$\mu_1=\sigma_n\ (\boldsymbol{A})$。

引理 3[6]：设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\Delta \boldsymbol{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，则对正整数 $r\leqslant n$，有

$$\min\ \{\|\Delta \boldsymbol{A}\|,\ \mathrm{rank}\ (\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A})\leqslant r\}=\sigma_{r+1}\ (\boldsymbol{A})$$

定理 2：考虑扰动系统（7），若标称系统（1）是渐近稳定的，当 $\|\Delta \boldsymbol{A}\|\leqslant\mu_A$ 时，系统（7）仍然是渐近稳定的，其中

$$\mu_A=\min\left\{\sigma_n\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon)),\ \frac{1}{2}\sigma_{n^2-1}\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon))\right\}$$

证明：设 $\Delta \boldsymbol{A}=\Delta \boldsymbol{A}\oplus\Delta \boldsymbol{A}$，由于 $\|\Delta \boldsymbol{A}\|\leqslant\frac{1}{2}\sigma_{n^2-1}\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon))$，则 $\|\Delta \boldsymbol{A}\oplus\Delta \boldsymbol{A}\|=\|\Delta \boldsymbol{A}\otimes \boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes\Delta \boldsymbol{A}\|\leqslant\|\Delta \boldsymbol{A}\otimes \boldsymbol{I}\|+\|\boldsymbol{I}\otimes\Delta \boldsymbol{A}\|=2\|\Delta \boldsymbol{A}\|<\sigma_{n^2-1}$，由引理 3，$\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon)+\Delta \boldsymbol{A})>n^2-2$，即矩阵 $\boldsymbol{A}\ (\varepsilon)+\Delta \boldsymbol{A}$ 没有纯虚的特征根，考虑到 μ_A 的定义，当 $\|\Delta \boldsymbol{A}\|\leqslant\mu_A$ 时，系统（7）仍然是渐近稳定的。

定理 2 的结果对扰动没有限制，具有较为广泛的适用性，而且保守程度降低，实例分析将验证这一点。

3 例 证

例 1：考察奇异摄动系统

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\varepsilon x_3\\\varepsilon x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4&-3&4\\0&2&-1&-2\\1&2&-2&3\\0&2&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

，利用 MATLAB 工具 eig（$\boldsymbol{A}_2$，$-\boldsymbol{A}_1$）得到所有的正实数根为 $\lambda_1=\lambda_2=4.948\ 0$，$\lambda_3=\lambda_4=0.980\ 3$，所以 $\alpha=0.980\ 3$，又当 $\varepsilon_0=1/2$ 时，

$$\boldsymbol{A}\ (\varepsilon_0)=\begin{bmatrix}-3&4&-3&4\\0&2&-1&-2\\2&4&-4&6\\0&4&0&-6\end{bmatrix}$$

是稳定的，从而 $\varepsilon^*=0.980\ 3$。

例 2：在例 1 中，取 $\varepsilon_0=1/2$，由定理 2，得 $\sigma_n\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon_0))=0.536\ 8$，$\sigma_{n^2-1}\ (\boldsymbol{A}\ (\varepsilon_0))=0.855\ 4$，所以稳定鲁棒性界 $\mu_A=0.472\ 7$。

4 结 论

本文分析了线性奇异摄动系统的稳定性和鲁棒性，基于代数矩阵理论得到 ε－稳定性界和稳定鲁棒性界。实例分析进一步说明了所提出方法的合理性和有效性。

参考文献：

[1] Klimushev, Krasovskii N K. Uncertain Asymptotic Stability of Systems Differential Equations with a Small Parameter in the Derivative Terms [J]. J of Applied Mathematics and Mechics, 1962, 25 (9): 1 011－1 025.

[2] Naidu D S. Singular Perturbation Methodology in Control Systems [M]. London: Perter Pererinus Ltd, 1998.

[3] Feng W. Characterization and Computation for the Bounds in Linear Time Invariant Singularly Perturbed Systems [J]. Systems Control Letter, 1988, 11: 195－202.

[4] Chen B, Lin C. On the Stability Bounds of Singularity Perturbed Systems [J], IEEE Tran Auto Control, 1990, 35: 1 265－1 270.

[5] Sen S, Datta K B. Stability Bounds of Singularity Perturbed Systems [J]. IEEE Tran Auto Control, 1993, 35: 302－304.

[6] Lancen Sard. New Stability Performance Results for Singularity Perturbed Systems [J]. IEEE Tran Auto Control, 1996, 32: 807－808.

[7] 陈公宁．矩阵理论与应用 [M]．北京：高等教育出版社，1990.