第 18 卷 第 1 期
2006 年 3 月

江 苏 工 业 学 院 学 报
JOURNAL OF JIANGSU POLYTECHNIC UNIVERSITY

Vol. 18 No. 1
Mar. 2006

文章编号：1005－8893（2006）01－0058－04

Banach 空间中一阶非线性积分－微分包含边值问题的正解

俞亚娟
（江苏工业学院 信息科学系，江苏 常州 213164）

摘要：在半序 Banach 空间中，利用集值映射得不动点定理，讨论一阶非线性积分－微分包含边值问题多个正解的存在性，并把所的结果应用到单值映射，所得结果减弱了对函数 f 的限制。

关键词：集值映射；上半连续；半序 Banach 空间；正解
中图分类号：O 175.8　　　　**文献标识码**：A

Multiple Positive Solutions for First Order Nonlinear Integro－Differential Inclusions in Banach Spaces

YU Ya－juan
（Department of Information Science，Jiangsu Polytechnic University，Changzhou 213164，China）

Abstract：By using the fixed point theorem for the set－valued maps，this paper discusses the existence of multi－positive solutions of the boundary value problems for the first order nonlinear integro－differential inclusions in Banach spaces. When the conclusions are applied to the single value maps，they weaken the restricted conditions on the function f.

Key words：set－valued map；u. s. c；ordered Banach space；positive solution

文献［1］讨论了下面无穷区间上的一阶非线性积分－微分方程的边值问题

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t),Tu(t),Su(t)),\ \forall t\in J \\ u(\infty)=\beta u(0) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f\in C[J\times P\times P\times P,\ P]$，$\beta>1$。

$$Tu(t)=\int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s,\ Su(t)=\int_0^\infty h(t,s)u(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

其中 $k\in C[D,\ R_+]$，$D=\{(t,s):t\geqslant s;\ t,s\in J\}$，$h\in C[J\times J,\ R_+]$。

本文在集值映射下，应用类似于单值映射的范数锥拉压不动点定理，讨论了下面的一阶非线性积分－微分包含边值问题

$$\begin{cases} u'(t)\in F(t,u(t),Tu(t),Su(t)),\ \forall t\in J \\ u(\infty)=\beta u(0) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $F:J\times P\times P\times P\to 2^P\setminus\phi$，$\beta>1$，$Tu(t)$，$Su(t)$ 同（2）式。最后把结论应用到（1）式，得到相应结论。

1　预备知识

$(E,\ \|\cdot\|)$ 表示 Banach 空间，θ 表示 E 的零元，R_+ 表示非负实数集。P 是 E 中的锥，且

收稿日期：2005－06－16
作者简介：俞亚娟（1978－），女，江苏常州人，硕士，研究方向：非线性分析及其应用。

$\|\cdot\|$ 按 P 单调递增。记

$C[J, E]=\{u: u$ 是映 J 入 E 的抽象连续函数$\}$

$C^1[J, E]=\{u: u$ 是映 J 入 E 的一阶连续可微抽象函数$\}$

$BC[J,E]=\{u\in C[J,E]: \sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|<\infty\}$

$BC[J,P]=\{u\in BC[J,E]: u(t)\geqslant\theta, \forall t\in J\}$

在范数 $\|u\|_B=\sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|$ 下，$BC[J, E]$ 是 Banach 空间。

设 S 是 E 中的有界集，$\alpha(S)$ 是非紧性测度。

引理 1[2]：设 $H\subset C[J, E]$ 是有界的，等度连续的，则 $\alpha(H(t))$ 在 J 上连续，且

$$\alpha(\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\})\leqslant\int_J\alpha(H(t))\mathrm{d}t$$

注 1[2]：若 $H\subset C[J, E]$ 是可数的，有界的，则 $\alpha(H(t))\in L[J, R_+]$，且下式成立

$$\alpha(\{\int_J x(t)\mathrm{d}t: x\in H\})\leqslant 2\int_J\alpha(H(t))\mathrm{d}t \quad (4)$$

引理 2[2]（Ascoli－Arzela 定理）：集 $H\subset C[J, E]$ 相对紧的充分必要条件是：H 是等度连续的，并且对每个 $t\in J$，集 $H(t)$ 是 E 中的相对紧集。

定义 1[4]：设 X，Y 为非空集，称映射 $F: X\to 2^Y$ 为 X 到 Y 的集值映射。

$\forall x\in X$，$F(x)$ 称为 F 在点 x 的值或像，$\mathrm{Dom}(F)=\{x\in X \mid F(x)\neq\phi\}$ 称为 F 的定义域，记 $G(F)=\{(x, y)\in X\times Y \mid y\in F(x)\}$ 称为 F 的图像。

定义 2[4]：设 X，Y 为非空集，①若 $\forall x\in X$，$F(x)$ 为闭（凸，有界，紧）集，则称 F 为闭值（凸值，有界值，紧值）映射；②若 $G(F)$ 为闭（凸，闭凸等）集，则称 F 是闭（凸，闭凸等）映射。

定义 3[4]：$\Omega\neq\phi$ 是 X 的子集，$F: \Omega\to 2^Y\setminus\phi$，称 F 为 u.s.c（上半连续），如果对 Y 的任意闭子集 A 有 $F^{-1}(A)$ 是 X 的闭子集，其中 $F^{-1}(A)=\{x: F(x)\cap A\neq\phi\}$。

注 2：若 F 为单值映射，且 F 按上面定义为上半连续，则 F 是连续映射，见文献 [5]。

引理 3[5]：设 $\Omega\neq\phi$ 是 Banach 空间 E 的子集，$F: \Omega\to 2^E\setminus\phi$ 是闭值映射，如果 F 是 u.s.c 且 Ω 是 E 的闭子集，那么 F 有闭图像。

引理 4[5]：设 X，Y 均为 Banach 空间。$\Omega\neq\phi$ 是 Y 的一个子集。$F: \Omega\to 2^X\setminus\phi$ 是 u.s.c 充分必要条件：若 $\{\omega_n\}\subset\Omega$，$A\subset X$ 是闭集，$\omega_n\to\omega_0\in\Omega$，且 $F(\omega_n)\cap A\neq\phi$ 对所有 $n\in N$ 均成立，那么有 $F(\omega_0)\cap A\neq\phi$。

定义 4：设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的锥，“$\leqslant$”是 P 导出的半序，A，B 是 E 的两个子集，称 $A\leqslant B$，如果对任意 $a\in A$ 存在 $b\in B$ 使 $a\leqslant b$。

定义 5：$F: E\to 2^E\setminus\phi$，称 F 是 E 上的增算子，若任意 u_1，$u_2\in E$，$u_1\leqslant u_2$，有 $Fu_1\leqslant Fu_2$。

定义 6[6]：设 $F: E\to 2^E\setminus\phi$，称 F 是 k－集压缩的，若对 E 中的任意有界集 A 有 $\alpha(F(A))\leqslant k\alpha(A)$，$0\leqslant k<1$。

定义 7[5]：设 (Ω, A) 是一个可测空间，称 $F: E\to 2^E\setminus\phi$ 是可测的，若对 E 中每个开集 O，$F^{-1}(O)=\{x\in\Omega: F(x)\cap O\neq\phi\}\in A$。

定义 8[5]：设 $f: \Omega\to E$，称 f 是 F 的一个选择，若任意 $x\in\Omega$ 有 $f(x)\in F(x)$。

注 3：有关锥的详细内容参见文献 [2]。

注 4：有关多值映射的详细内容参见文献 [5]。

定义 9：设 $\Omega\neq\phi$ 是 Banach 空间 Y 的子集，X 是 Banach 空间。称 $F: \Omega\to 2^X\setminus\phi$ 是紧算子，若 F 把 Ω 中的有界集映成 X 中的相对紧集。

引理 5[6]：设 E 是 Banach 空间，C 是 E 中的闭凸子集，U 是 C 的开子集且 $\theta\in U$。若 $F: \overline{U}\to 2^C\setminus\phi$ 是 u.s.c，k－集压缩的紧凸值映射，那么下面结论有且只有一个成立：①存在 $u\in\overline{U}$ 使得 $u\in F(u)$；②存在 $u\in\partial U$ 及 $\lambda\in[0, 1]$ 使得 $u\in\lambda F(u)$。

引理 6[6]：设 $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$P\subseteq E$ 是一个锥，且 $\|\cdot\|$ 按 P 导出的半序单调递增，常数 r，R 满足 $0<r<R$。记 $\overline{\Omega}_R=\{x\in P: \|x\|\leqslant R\}$，$\overline{\Omega}_r=\{x\in P: \|x\|\leqslant r\}$。

若 $F: \overline{\Omega}_R\to 2^P\setminus\phi$ 是 u.s.c，k－集压缩的紧凸值映射，且下面条件成立：① $\|y\|\leqslant\|x\|$，$\forall y\in F(x)$，$x\in\partial\overline{\Omega}_R$；② $\|y\|>\|x\|$，$\forall y\in F(x)$，$x\in\partial\overline{\Omega}_r$，则 F 有不动点 x，且 $x\in\{x\in P: r<\|x\|\leqslant R\}$。

引理 7[6]：设 $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$P\subseteq E$ 是一个锥，且 $\|\cdot\|$ 按导出的半序单调递增的，常数 r，R 满足 $0<r<R$。记 $\overline{\Omega}_R=\{x\in P: \|x\|\leqslant R\}$，$\overline{\Omega}_r=\{x\in P: \|x\|\leqslant r\}$。

若 $F: \overline{\Omega}_R\to 2^P\setminus\phi$ 是 u.s.c，k－集压缩的紧凸值映射，且下面条件成立：① $\|y\|>\|x\|$，$\forall y\in F(x)$，$x\in\partial\overline{\Omega}_R$；② $\|y\|\leqslant\|x\|$，$\forall y\in F(x)$，$x\in\partial\overline{\Omega}_r$，则 F 有不动点 x，且 $x\in\{x\in P: r\leqslant\|x\|<R\}$。称 $u\in C^1[J, E]$ 是 (3) 式

的正解，如果 $u\in BC[J,P]$ 且满足（3）式。

2 主要结果

先给出下面几个条件：

(H_1) $F: J\times P\times P\times P\to 2^P\setminus\phi$ 是凸闭值映射。$\forall u,v,w\in P$，$F(\cdot,u,v,w)$ 可测，对 a. e. $t\in J$，$F(t,.,.,.)$ 是 u. s. c，存在 $p\in L^1[J,R_+]$，使得对任意 $x(t)\in F(t,u,v,w)$，有

$\|x(t)\|\leqslant p(t)(a\|u\|+b\|v\|+c\|w\|)$，

且 $S^1_{F,u}=\{x\in L^1[J,E]: x(t)\in F(t,u(t),Tu(t),Su(t))$，a. e. $t\in J\}\neq\phi$，$\forall u\in C[J,E]$。

(H_2) $k^*=\sup\limits_{t\in J}\int_0^t k(t,s)\mathrm{d}s<\infty$，

$h^*=\sup\limits_{t\in J}\int_0^\infty h(t,s)\mathrm{d}s<\infty$，

且 $\lim\limits_{t'\to t}\int_0^\infty|h(t',s)-h(t,s)|\mathrm{d}s=0$，a. e. $t\in J$。

(H_3) $\forall t\in J$，$F(t,B_1,B_2,B_3)$ 是 E 中的相对紧集，其中 B_1，B_2，B_3 是 E 中的有界集。

注 5：由 (H_1)，(H_3) 知，F 是紧凸值映射。

引理 8[1]：如果条件 (H_2) 满足，那么算子 T 和 S 是映 $BC[J,E]$ 人 $BC[J,E]$ 的有界线性算子，且 $\|T\|\leqslant k^*$，$\|S\|\leqslant h^*$。

引理 9[1]：若条件 (H_2) 满足，那么 $u\in C^1[J,E]$ 是（3）式的一个正解当且仅当 $u\in BC[J,P]$，存在 $x\in S^1_{F,u}$，使得 u 是下面积分方程的解：

$$u(t)=\frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

定义算子 $A: BC[J,P]\to 2^{C^1[J,P]}\setminus\phi$ 如下：

$$A(u)=\{h\in C^1[J,P]: h(t)=\frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t x(s)\mathrm{d}s; x\in S^1_{F,u}, \text{a. e. } t\in J\} \tag{6}$$

由引理 2、引理 4、引理 8 及引理 9 可得下面结论：

引理 10：如果条件 $(H_1)\sim(H_3)$ 成立，则 $A(BC[J,P])\subset BC[J,P]$，且算子 A 是 u. s. c，紧凸值算子。

再给出下面几个条件：

(H_4) 任意 $t\in J$，存在 $c(t)\in C[J,P]\cap L^1[J,R_+]$，当 $\|u\|+\|v\|+\|w\|\to 0$ 时，有：

$$\frac{\|x(t)\|}{c(t)(\|u\|+\|v\|+\|w\|)}\to 0,$$

$\forall x(t)\in F(t,u,v,w)$，$u,v,w\in P$。

(H_5) 任意 $t\in J$，存在 $d(t)\in C[J,P]\cap L^1[J,R_+]$，当 $\|u\|+\|v\|+\|w\|\to\infty$ 时，有：

$$\frac{\|x(t)\|}{d(t)(\|u\|+\|v\|+\|w\|)}\to 0,$$

$\forall x(t)\in F(t,u,v,w)$，$u,v,w\in P$。

(H_6) 存在 $R>0$，当 $u\in\{u\in BC[J,P]: \|u\|_B=R\}$，$x\in S^1_{F,u}$ 时，成立：

$$\sup_{t\in J}\left\{\left\|\frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\right\|\right\}>R。$$

定理 1：若条件 $(H_1)\sim(H_6)$ 成立，则（3）式有平凡解 θ 及两个正解 u_1，u_2，且存在常数 r，L，满足 $0<r<R<L$，使得：

$r\leqslant\|u_1\|_B<R<\|u_2\|_B\leqslant L$。

证明：首先，由引理 10 知，A 是定义在 $BC[J,P]$ 上的 u. s. c，凸值紧算子。

其次，由条件 (H_4)，取 $\varepsilon=\dfrac{\beta-1}{(1+k^*+h^*)c^*\beta}$（其中 $c^*=\int_0^\infty c(t)dt$），可证，存在 r_1，当 $\|u\|_B\leqslant\dfrac{r_1}{1+k^*+h^*}$，$x\in S^1_{F,u}$ 时，有：

$$\left\|\frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\right\|\leqslant\|u\|_B \tag{7}$$

取 r 满足 $0<r\leqslant\dfrac{r_1}{1+k^*+h^*}$，记

$\Omega_{\frac{r}{n}}=\{u\in BC[J,P]: \|u\|_B<\frac{r}{n}\}$，$\overline{\Omega}_{\frac{r}{n}}=\{u\in BC[J,P]: \|u\|_B\leqslant\frac{r}{n}\}$，$n=1,2,\Lambda$。

由（7）式，知

$$A(\overline{\Omega}_r)\subset\overline{\Omega}_r \tag{8}$$

$$A(\overline{\Omega}_{\frac{r}{n}})\subset\overline{\Omega}_{\frac{r}{n}} \tag{9}$$

若存在 $u\in\partial\Omega_{\frac{r}{n}}$ 及 $\lambda\in[0,1]$，使得 $u\in Au$；则由（9）式，有 $\frac{r}{n}=\|u\|_B\leqslant\frac{\lambda r}{n}<\frac{r}{n}$ 产生矛盾。故由引理 5 知，存在 $u\in\partial\overline{\Omega}_{\frac{r}{n}}$，使 $u\in Au$ 且 $0\leqslant\|u\|_B\leqslant\frac{r}{n}$。令 $n\to\infty$ 知（3）式有平凡解 $u=\theta$。

由（8）式知，$\forall u\in\partial\Omega_r$，$\forall y\in Au$ 有：

$$\|y\|_B\leqslant\|u\|_B \tag{10}$$

记 $\Omega_R=\{u\in BC[J,P]: \|u\|_B<R\}$，$\overline{\Omega}_R=\{u\in BC[J,P]: \|u\|_B\leqslant R\}$。

由条件 (H_6) 知，$\forall u\in\partial\overline{\Omega}_R$，$\forall y\in Au$ 有：

$$\|y\|_B>\|u\|_B \tag{11}$$

从而由（10），（11）两式及引理 7 知，存在 $u_1\in\{u\in BC[J,P]: r\leqslant\|u\|_B<R\}$，使得 $u_1\in Au_1$。即 u_1 为（3）式的正解，且满足 $r\leqslant$

$\| u_1 \| < R$。

再由条件（H_5），取 $\varepsilon = \frac{\beta-1}{(1+k^*+h^*)\ d^*\beta}$（其中 $d^* = \int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t$），存在 $R_1 >$（$1+k^*+h^*$）R，可证，当 $\| u \|_B \geqslant \frac{R_1}{1+k^*+h^*}$，$x \in S_{F,u}^1$ 时，有：

$$\| \frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty x(s)\mathrm{d}s + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s \| \leqslant \| u \|_B \qquad (12)$$

取 $L \geqslant \frac{R_1}{1+k^*+h^*}$，记

$\Omega_L = \{u \in BC[J, P] : \| u \|_B < L\}$，

$\overline{\Omega}_L = \{u \in BC[J, P] : \| u \|_B \leqslant L\}$。

由（11）、（12）两式及引理6知，存在 $u_2 \in \{u \in BC[J, P] : R < \| u \|_B \leqslant L\}$，使得 $u_2 \in Au_2$，且有 $0 < r < R < L$。

综上所述（3）式存在平凡解 θ 及正解 u_1，u_2，且有 $r \leqslant \| u_1 \|_B < R < \| u_2 \|_B \leqslant L$。证毕！

下面考察边值问题（1），给出下面假设条件：

（h_1）$f: J \times P \times P \times P \to P$，$\forall u, v, w \in P$，$f(\cdot, u, v, w)$ 可测，对 a.e. $t \in J$，$F(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ 是连续，存在 $p \in L^1[J, R_+]$ 有 $\| f(t, u, v, w) \| \leqslant p(t)(a\| u \| + b\| v \| + c\| w \|)$，且

$S_{F,u}^1 = \{x \in L^1[J, E] : x(t) \in F(t, u(t), Tu(t), Su(t))$, a.e. $t \in J\} \neq \phi$，$\forall u \in C[J, E]$。

（h_2）$k^* = \sup_{t\in J}\int_0^t k(t,s)\mathrm{d}s < \infty$，$h^* = \sup_{t\in J}\int_0^\infty h(t,s)\mathrm{d}s < \infty$，且

$\lim_{t'\to t}\int_0^\infty | h(t',s) - h(t,s) | \mathrm{d}s = 0$，a.e. $t \in J$。

（h_3）$\forall t \in J$，$f(t, B_1, B_2, B_3)$ 是 E 中的相对紧集，其中 B_1，B_2，B_3 是 E 中的有界集。

（h_4）任意 $t \in J$，存在 $c(t) \in C[J, P] \cap L^1[J, R_+]$，当 $\| u \| + \| v \| + \| w \| \to 0$ 时，有：

$\frac{\| f(t, u, v, w) \|}{c(t)(\| u \| + \| v \| + \| w \|)} \to 0$，$\forall u, v, w \in P$。

（h_5）任意 $t \in J$，存在 $d(t) \in C[J, P] \cap L^1[J, R_+]$，当 $\| u \| + \| v \| + \| w \| \to \infty$ 时，有：

$\frac{\| f(t, u, v, w) \|}{d(t)(\| u \| + \| v \| + \| w \|)} \to 0$，$\forall u, v, w \in P$。

（h_6）存在 $R > 0$，当 $u \in BC[J, P] : \| u \|_B = R$ 时，成立：

$$\sup_{t\in J}\{ \| \frac{1}{\beta-1}\int_0^\infty f(s,u(s),Tu(s),Su(s))\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,u(s),Tu(s),Su(s))\mathrm{d}s \| \} > R。$$

定理2：若条件（h_1）～（h_6）成立，则（1）式有平凡解 θ 及两个正解 u_1，u_2，且存在常数 r，R，L，满足 $0 < r < R < L$，使得：

$r \leqslant \| u_1 \| < R < \| u_2 \| \leqslant L$。

证明：由定理1及注1得证。

注6：从定理2可知，把文献[1]中的连续性条件由下面的较弱条件：①对 a.e. $t \in J$，$f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ 连续，②$\forall u, v, w \in E$，$f(\cdot, u, v, w)$ 可测，代替后，得到了（1）式的两个非零几乎处处正解 u_1，u_2。

参考文献：

[1] 郭大均．非线性分析中的半序方法[M]．济南：山东科学技术出版社，2003.

[2] Heinz H P. On the Behaviour of Measure of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-Valued Functions [J]. Nonlinear Anal, TMA, 1983, 7: 1 351—1 371.

[3] Klaus Deimiling. Multivalued Differential Equation [M]. New York: Walter de Gruyter Berlin, 1992.

[4] Mikhail Kamenskii, Valeri Obukhovskii Pietro Zecca. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Space [M]. New York: Walter de Gruyter Berlin, 2001.

[5] Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan, A Note on the Existence of Multiple Fixed Points for Multivalued Maps with Applications [J]. Journal of Differential Equations, 2000, 160: 389—403.

[6] Dajun Guo. Multiple Positive Solutions for First Order Nonlinear Integro-Differential Equations in Banach Spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2003, 53: 183—195.